

Inhalt

I. Grundlagen

1. Zahlen	17
1.1. Die natürlichen und die ganzen Zahlen	17
1.2. Die rationalen Zahlen	18
1.3. Die reellen Zahlen	19
1.3.1. Irrationale Zahlen	19
1.3.2. Intervallschachtelung	20
1.3.3. Grundgesetze der Arithmetik	22
1.4. Die komplexen Zahlen	24
1.5. Das Rechnen mit Ungleichungen und absoluten Beträgen	29
1.5.1. Ungleichungen	29
1.5.2. Absolute Beträge	33
1.6. Das Rechnen mit Näherungswerten	35
1.7. Zahlensystem	37
1.8. Übungsaufgaben	39
2. Mengen	41
2.1. Der Begriff der Menge	41
2.2. Einige Eigenschaften von Mengen	42
2.3. Zahlenmengen	44
2.4. Punktmengen	47
2.4.1. Lineare Punktmengen	47
2.4.2. Ebene Punktmengen	49
3. Zahlenfolgen	52
3.1. Der Begriff der Zahlenfolge	52
3.2. Häufungswerte	56
3.2.1. Häufungswert einer Zahlenfolge	56
3.2.2. Häufungsgrenzen einer Zahlenfolge	57
3.2.3. Untere und obere Grenze einer Zahlenfolge	58
3.3. Konvergente Zahlenfolgen	60
3.3.1. Definitionen. Erstes Konvergenzkriterium	60
3.3.2. Eigenschaften konvergenter Zahlenfolgen	65
3.3.3. Wichtige Beispiele konvergenter Zahlenfolgen	67
3.4. Monotone Zahlenfolgen	70
3.4.1. Definition	70
3.4.2. Zweites Konvergenzkriterium	71

3.4.3. Die Zahl e	73
3.4.4. Anwendung des zweiten Konvergenzkriteriums auf Intervallschachtelungen	74
3.5. Das allgemeine Konvergenzkriterium von CAUCHY	75
3.6. Übungsaufgaben	77
4. Der binomische Lehrsatz. Kombinatorik	78
4.1. Binomialkoeffizienten	78
4.2. Der binomische Lehrsatz	81
4.3. Der polynomische Lehrsatz	83
4.4. Permutationen	85
4.5. Variationen	87
4.6. Kombinationen	89
4.7. Übungsaufgaben	90
 II. Funktionen einer unabhängigen Veränderlichen	
5. Der Funktionsbegriff	92
5.1. Definitionen und Beispiele	92
5.2. Zur Darstellung von Funktionen	94
5.2.1. Darstellung durch eine Formel	95
5.2.2. Darstellung durch eine Tabelle	96
5.2.3. Graphische Darstellung	96
5.3. Einige Grundbegriffe	102
5.3.1. Monotone Funktionen	102
5.3.2. Gerade und ungerade Funktionen	103
5.3.3. Periodische Funktionen	104
5.3.4. Der Begriff der Umkehrfunktion	106
5.3.5. Der Begriff der mittelbaren Funktion	108
5.4. Übungsaufgaben	109
6. Grenzwert einer Funktion	110
6.1. Grenzwert von $f(x)$ für $x \rightarrow x_0$	110
6.2. Einseitige Grenzwerte	114
6.3. Grenzwertsätze	117
6.4. Grenzwert von $f(x)$ für $x \rightarrow \infty$ oder $x \rightarrow -\infty$	126
6.5. Uneigentliche Grenzwerte	128
6.6. Übungsaufgaben	132
7. Stetigkeit einer Funktion	134
7.1. Definition der Stetigkeit	134
7.2. Einseitige Stetigkeit	137
7.3. Unstetigkeiten	140
7.4. Eigenschaften stetiger Funktionen	145
7.4.1. Das Rechnen mit stetigen Funktionen	145
7.4.2. Stetigkeit der mittelbaren Funktion	146
7.4.3. Stetigkeit der Umkehrfunktion	147
7.5. Funktionen, die auf einem abgeschlossenen Intervall stetig sind	147
7.6. Die Regula falsi	151
7.7. Übungsaufgaben	153

8. Ganze rationale Funktionen	153
8.1. Allgemeine Eigenschaften	153
8.1.1. Grundbegriffe	153
8.1.2. Lineare Funktion	155
8.1.3. Quadratische Funktion	157
8.1.4. Allgemeine Eigenschaften von Polynomen	158
8.2. Potenzfunktionen mit positiven ganzen Exponenten	162
8.3. Ermittlung von Funktionswerten	164
8.3.1. Das Verfahren von HORNER	164
8.3.2. Das Verfahren von LILL	165
8.4. Interpolation	166
8.4.1. Allgemeine Bemerkungen	166
8.4.2. Interpolationsformel von LAGRANGE	168
8.4.3. Interpolationsformel von NEWTON	170
8.5. Zur Lösung algebraischer Gleichungen	179
8.5.1. Allgemeine Bemerkungen	179
8.5.2. Kubische Gleichungen	181
8.5.3. Das Verfahren von GRAEFFE	183
8.6. Übungsaufgaben	188
9. Rationale und algebraische Funktionen	189
9.1. Definition und grundlegende Eigenschaften der rationalen Funktionen	189
9.2. Teilbruchzerlegung der rationalen Funktionen	194
9.3. Potenzfunktionen mit negativen ganzen Exponenten	195
9.4. Algebraische Funktionen	198
9.5. Übungsaufgaben	201
10. Exponential- und Logarithmusfunktionen	201
10.1. Potenzen	201
10.1.1. Potenzen mit ganzen Exponenten	202
10.1.2. Potenzen mit rationalen Exponenten	202
10.1.3. Potenzen mit reellen Exponenten	204
10.2. Definition und Eigenschaften der Exponentialfunktionen	205
10.3. Definition und Eigenschaften der Logarithmusfunktionen	212
10.4. Potenzfunktionen mit beliebigen reellen Exponenten	215
10.5. Einige spezielle Grenzwerte	217
10.6. Logarithmische Funktionsleitern und Funktionspapiere	218
10.6.1. Logarithmische Funktionsleiter	218
10.6.2. Doppeltlogarithmisches Funktionspapier	218
10.6.3. Einfachlogarithmisches Funktionspapier	220
10.7. Übungsaufgaben	222
11. Trigonometrische Funktionen und Arcus-Funktionen	223
11.1. Winkelmessung	223
11.2. Sinus- und Kosinusfunktion	224
11.3. Tangens- und Kotangensfunktion	227
11.4. Trigonometrische Darstellung der komplexen Zahlen	232

11.5. Schwingungen	237
11.5.1. Begriff der harmonischen Schwingung	237
11.5.2. Überlagerung harmonischer Schwingungen gleicher Frequenz und gleicher Schwingungsrichtung	238
11.5.3. Schwebungen	242
11.5.4. Überlagerung bei verschiedener Schwingungsrichtung	245
11.6. Arcus-Funktionen	248
11.7. Übungsaufgaben	255
12. Hyperbolische Funktionen und Area-Funktionen	256
12.1. Definition und Eigenschaften der hyperbolischen Funktionen	256
12.2. Definition und Eigenschaften der Area-Funktionen	261
12.3. Geometrische Deutung der Hyperbelfunktionen	265
12.4. Übungsaufgaben	269
 III. Differentialrechnung für Funktionen einer unabhängigen Veränderlichen	
13. Begriff der Ableitung	270
13.1. Vorbemerkung	270
13.2. Definition der Ableitung	270
13.3. Einseitige Ableitungen	273
13.4. Uneigentliche Ableitungen	274
13.5. Geometrische Bedeutung der Ableitung	275
13.6. Anwendungen der Ableitung in den Naturwissenschaften	277
13.7. Weierstraßsche Zerlegungsformel	281
13.8. Stetigkeit und Differenzierbarkeit	282
13.9. Übungsaufgaben	283
14. Allgemeine Regeln über Ableitungen	283
14.1. Ableitung einer Konstanten	283
14.2. Ableitung einer Linearkombination von Funktionen	284
14.3. Ableitung eines Produktes von Funktionen	285
14.4. Ableitung eines Quotienten von Funktionen	286
14.5. Ableitung einer mittelbaren Funktion	288
14.6. Übungsaufgaben	290
15. Ableitung elementarer transzendenter Funktionen	290
15.1. Trigonometrische Funktionen	290
15.2. Exponentialfunktionen	293
15.3. Hyperbolische Funktionen	294
15.4. Übungsaufgaben	296
16. Ableitung der Umkehrfunktion	296
16.1. Allgemeine Bemerkungen	296
16.2. Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten	299
16.3. Arcus-Funktionen	300
16.4. Logarithmusfunktionen	303
16.5. Potenzfunktionen mit beliebigen reellen Exponenten	305
16.6. Area-Funktionen	307
16.7. Übungsaufgaben	307

17. Das Differential einer Funktion	308
17.1. Definition	308
17.2. Geometrische Bedeutung des Differentials	309
17.3. Funktionszuwachs und Differential	311
17.4. Anwendungen in der Fehlerrechnung	311
17.5. Übungsaufgaben	312
18. Höhere Ableitungen	313
18.1. Definition der Ableitung n -ter Ordnung	313
18.2. Höhere Ableitungen einiger elementarer Funktionen	315
18.2.1. Potenzfunktionen	315
18.2.2. Exponential- und Logarithmusfunktionen	316
18.2.3. Trigonometrische Funktionen	316
18.2.4. Ableitungen eines Produktes von Funktionen	317
18.3. Zur physikalischen Bedeutung der zweiten Ableitung	317
18.4. Differentiale höherer Ordnung	319
18.5. Übungsaufgaben	319
19. Mittelwertsätze der Differentialrechnung	320
19.1. Satz von ROLLE	320
19.2. Mittelwertsatz der Differentialrechnung	322
19.3. Verallgemeinerter Mittelwertsatz der Differentialrechnung	326
19.4. Übungsaufgaben	327
20. Berechnung von Grenzwerten	327
20.1. Vorbemerkung	327
20.2. Erste Regel von BERNOULLI-DE L'HOSPITAL	329
20.3. Zweite Regel von BERNOULLI-DE L'HOSPITAL	332
20.4. Grenzwerte der Form $\lim_{x \rightarrow x_0} \{f_1(x) \cdot f_2(x)\}$ und $\lim_{x \rightarrow x_0} \{f_1(x) + f_2(x)\}$	335
20.5. Grenzwerte der Form $\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x)^{f_2(x)}$	337
20.6. Übungsaufgaben	340
21. Parameterdarstellung von Kurven	341
21.1. Einführung der Parameterdarstellung	341
21.2. Ableitungen in Parameterdarstellung	347
21.3. Die Gleichung der Kurventangente	350
21.4. Die Gleichung der Kurvennormalen	352
21.5. Übungsaufgaben	352
22. Polarkoordinaten	353
22.1. Definition und Beispiele	353
22.2. Ableitungen in Polarkoordinaten	357
22.3. Übungsaufgaben	360
23. Untersuchung des Verhaltens von Funktionen	360
23.1. Vorbemerkung	360
23.2. Bedeutung des Vorzeichens der ersten Ableitung	361
23.3. Extremwerte	362

23.4. Bedeutung des Vorzeichens der zweiten Ableitung	371
23.5. Wendepunkte	373
23.6. Übungsaufgaben	377
24. Graphische, numerische und instrumentelle Verfahren zur Bestimmung der Ableitung einer Funktion	378
24.1. Graphische Differentiation	378
24.2. Numerische Differentiation	379
24.3. Instrumentelle Differentiation	380
24.4. Übungsaufgaben	381
25. Näherungsweise Berechnung von Lösungen der Gleichung $f(x) = 0$	382
25.1. Iterationsverfahren	382
25.2. Das Newtonsche Verfahren	388
25.3. Das verallgemeinerte Iterationsverfahren	393
25.4. Übungsaufgaben	393
 IV. Integralrechnung für Funktionen einer unabhängigen Veränderlichen	
26. Das bestimmte Integral	396
26.1. Zur Problemstellung	396
26.2. Intervallzerlegungen	398
26.3. Definition des bestimmten Integrals	399
26.4. Einige integrierbare Funktionenklassen	405
26.5. Beispiele für die direkte Berechnung bestimmter Integrale	406
26.6. Anwendungen des Integralbegriffs in den Naturwissenschaften	408
26.6.1. Begriff der Arbeit einer Kraft	408
26.6.2. Statisches Moment und Trägheitsmoment einer ebenen homogenen Massenverteilung	409
26.6.3. Schwerpunkt einer ebenen homogenen Massenverteilung	413
26.7. Übungsaufgaben	413
27. Eigenschaften des bestimmten Integrals	414
27.1. Eigenschaften, die das Integrationsintervall betreffen	414
27.2. Eigenschaften, die den Integranden betreffen	415
27.3. Ungleichungen zwischen Integralen	416
27.4. Erster Mittelwertsatz der Integralrechnung	420
27.5. Übungsaufgaben	423
28. Das unbestimmte Integral	424
28.1. Das bestimmte Integral als Funktion der oberen Integrationsgrenze	424
28.2. Definition des unbestimmten Integrals	427
28.3. Zusammenhang mit der Differentialrechnung	429
28.4. Übungsaufgaben	431
29. Technik des Integrierens	432
29.1. Grundintegrale	432
29.2. Substitutionsmethode	434
29.3. Anwendung der Substitutionsmethode auf bestimmte Integrale	438

29.4. Methode der partiellen Integration	440
29.5. Rekursionsformeln	446
29.6. Übungsaufgaben	448
30. Technik des Integrierens (Fortsetzung)	450
30.1. Integration der rationalen Funktionen	450
30.1.1. Zur Herstellung der Teilbruchzerlegung	450
30.1.2. Integrale der Form $\int \frac{Bx + C}{x^2 + px + q} dx$	457
30.1.3. Integrale der Form $\int \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^l} dx$; $l > 1$, ganz	461
30.2. Integration einiger spezieller nichtrationaler Funktionen	461
30.3. Zur Tragweite der Integrationsverfahren	466
30.4. Übungsaufgaben	467
31. Uneigentliche Integrale	468
31.1. Erweiterung des Integralbegriffs	468
31.2. Integrale mit unbeschränkten Integranden	469
31.3. Integrale über unbeschränkte Integrationsintervalle	475
31.4. Zum Rechnen mit uneigentlichen Integralen	481
31.5. Hauptwert eines uneigentlichen Integrals	482
31.6. Übungsaufgaben	483
32. Einige Anwendungen der Integralrechnung auf die ebene Geometrie	484
32.1. Flächeninhalt ebener Bereiche	484
32.2. Bogenlänge einer ebenen Kurve	493
32.3. Krümmung einer ebenen Kurve	497
32.4. Übungsaufgaben	502
33. Graphische und numerische Integration	503
33.1. Graphische Integration	503
33.2. Numerische Integration	507
33.2.1. Rechteckformeln	508
33.2.2. Sehnentrapezformel	508
33.2.3. Tangententrapezformel	509
33.2.4. Keplersche Formel	509
33.2.5. Simpsonsche Formel	511
33.3. Einige Bemerkungen zur instrumentellen Integration	513
33.4. Übungsaufgaben	514

V. Reihen

34. Unendliche Reihen	515
34.1. Definitionen	515
34.2. Unmittelbare Berechnung der Reihensumme s	519
34.3. Zwei Konvergenzkriterien	520
34.4. Das Rechnen mit unendlichen Reihen	522
34.5. Übungsaufgaben	523

35. Reihen mit positiven Gliedern	524
35.1. Hauptkriterium für Reihen mit positiven Gliedern	524
35.2. Vergleichskriterien	525
35.3. Quotientenkriterium	526
35.4. Wurzelkriterium	529
35.5. Übungsaufgaben	530
36. Reihen mit beliebigen Gliedern	531
36.1. Alternierende Reihen	531
36.2. Absolut konvergente Reihen	533
36.3. Konvergenzkriterien für absolut konvergente Reihen	534
36.4. Unbedingt konvergente Reihen	537
36.5. Multiplikation unendlicher Reihen	540
36.6. Übungsaufgaben	543
37. Funktionenfolgen und Funktionenreihen	544
37.1. Definition	544
37.2. Gleichmäßig konvergente Reihen	546
37.3. Gliedweise Integration und Differentiation	552
37.4. Übungsaufgaben	556
38. Potenzreihen	556
38.1. Konvergenzverhalten von Potenzreihen	556
38.2. Eigenschaften der Reihensumme $s(x)$	560
38.3. Übungsaufgaben	565
39. Taylorsche Formel und Taylorsche Reihe	566
39.1. Entwicklung eines Polynoms	566
39.2. Taylorsche Formel	567
39.3. Taylorsche Reihe	571
39.4. Entwicklung der elementaren Funktionen	573
39.4.1. Entwicklung der Exponentialfunktion	573
39.4.2. Entwicklung der trigonometrischen Funktionen	574
39.4.3. Entwicklung der Logarithmusfunktion	575
39.4.4. Entwicklung der Funktion $(1+x)^a$	576
39.5. Übungsaufgaben	578
40. Anwendung der Taylorschen Formel und Taylorschen Reihe	579
40.1. Numerische Berechnung der Funktionswerte elementarer Funktionen	579
40.1.1. Zur Problemstellung	579
40.1.2. Exponentialfunktion. Berechnung von e	579
40.1.3. Trigonometrische Funktionen	581
40.1.4. Berechnung von Wurzeln	582
40.2. Näherungsformeln	583
40.3. Zur Theorie der Extremwerte und Wendepunkte	586
40.4. Übungsaufgaben	589

41. Fourier-Reihen	589
41.1. Orthogonalität des trigonometrischen Fundamentalsystems	589
41.2. Trigonometrische Reihen und Fourier-Reihen	592
41.3. Fourier-Reihen für gerade und ungerade Funktionen	597
41.4. Fourier-Reihen in komplexer Form	602
41.5. Fourier-Reihen für Funktionen der Periode $2p$	604
41.6. Zum Konvergenzverhalten von Fourier-Reihen	605
41.7. Summierbarkeit von Fourier-Reihen	608
41.8. Zur numerischen Durchführung der harmonischen Analyse	609
41.8.1. Das Verfahren von RUNGE	609
41.8.2. Das Verfahren von FISCHER-HINNEN	611
41.9. Übungsaufgaben	613
42. Orthogonale Funktionensysteme	614
42.1. Grundbegriffe und Beispiele	614
42.2. Fourier-Reihen bezüglich eines beliebigen orthogonalen Funktionensystems	616
42.3. Vollständige Funktionensysteme	621
42.4. Übungsaufgaben	626
 VI. Anschauliche Vektorrechnung und Analytische Geometrie	
43. Vektorbegriff. Rechnen mit Vektoren	628
43.1. Begriff des Vektors	628
43.2. Addition und Subtraktion von Vektoren	630
43.3. Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar	632
43.4. Vorbereitende Betrachtungen zur Multiplikation von Vektoren	634
43.4.1. Orientierung einer Ebene	634
43.4.2. Rechtssystem	635
43.4.3. Winkel zwischen gerichteten Geraden und Winkel zwischen Vektoren	635
43.4.4. Orthogonale Vektoren	636
43.4.5. Projektion eines Vektors auf eine gerichtete Gerade	636
43.5. Zerlegung von Vektoren nach gegebenen Richtungen	637
43.6. Skalares Produkt zweier Vektoren	640
43.7. Vektoriell Produkt zweier Vektoren	644
43.8. Übungsaufgaben	649
44. Vektorrechnung unter Verwendung eines Koordinatensystems	650
44.1. Koordinatensystem	650
44.2. Ortsvektoren	651
44.3. Komponenten und Koordinaten eines Vektors	652
44.4. Rechnen mit Vektoren in Koordinaten-Schreibweise	653
44.5. Determinanten	656
44.6. Zusammengesetzte Produkte von Vektoren	659
44.6.1. Spatprodukt	659
44.6.2. Andere zusammengesetzte Produkte	663
44.7. Übungsaufgaben	664

45. Gerade und Ebene	666
45.1. Grundbegriffe	666
45.1.1. Richtungskosinus	666
45.1.2. Teilverhältnis	667
45.1.3. Flächeninhalt und Volumen	669
45.1.4. Transformation des Koordinatensystems	669
45.2. Gleichung der Geraden	673
45.3. Lagebeziehungen zwischen zwei Geraden	679
45.4. Gleichung der Ebene	683
45.5. Lagebeziehungen zwischen zwei Ebenen	687
45.6. Lagebeziehungen zwischen Ebene und Gerade	689
45.7. Übungsaufgaben	690
46. Kurven und Flächen zweiter Ordnung	693
46.1. Kreis und Kugel	693
46.2. Kurven zweiter Ordnung	695
46.3. Flächen zweiter Ordnung	701
46.3.1. Vorbemerkungen	701
46.3.2. Allgemeine Gleichung und Klassifikation der Flächen zweiter Ordnung	703
46.3.3. Diskussion der nichtentarteten Flächen zweiter Ordnung	706
46.4. Übungsaufgaben	709
Namenverzeichnis	711
Sachverzeichnis	712
Tabelle 1: Zur Theorie der Extremwerte (als Beilage)	
Tabelle 2: Zur Theorie der Extremwerte (als Beilage)	