

TABLE DES MATIÈRES

DE LA TROISIÈME PARTIE.

LIVRE VI.

LIGNES GÉODÉSIQUES ET COURBURE GÉODÉSIQUE.

CHAPITRE I.

	Pages.
<i>Détermination des géodésiques par la méthode de Jacobi.....</i>	1
Surfaces de révolution; lignes géodésiques. — Équation de Clairaut. —	
Détermination des surfaces pour lesquelles les géodésiques sont généralement fermées; celles de ces surfaces qui ont un équateur sont applicables sur la sphère. — Géodésiques des surfaces dont l'élément linéaire est réductible à la forme étudiée par M. Liouville	

$$ds^2 = (U - V)(U^2 du^2 + V^2 dv^2).$$

Forme géométrique que l'on peut donner à l'intégrale première. — Première application au plan et à la sphère. — Géodésiques de l'ellipsoïde; leur discussion sommaire et leur division en trois espèces. — Propositions géométriques se rapportant à l'élément linéaire de Liouville; coniques géodésiques isothermes; familles de courbes qui peuvent être regardées de deux manières différentes comme formées de coniques géodésiques. — Extension de divers théorèmes de Graves et de M. Chasles.

CHAPITRE II.

<i>Intégrales homogènes du premier et du second degré.....</i>	23
Méthodes régulières pour la détermination des géodésiques. — L'équation différentielle du second ordre des géodésiques remplacée par un système canonique. — Usage que l'on peut faire d'une ou de deux intégrales de ce système. — Intégrales homogènes. — Intégrale du premier degré : elle caractérise les surfaces applicables sur les surfaces de révolution. — Intégrale du second degré. — Il y a deux formes distinctes de l'élément linéaire pour lesquelles on trouve une intégrale du second degré. Pour la première et la plus importante, l'élément linéaire est réductible à la forme de M. Liouville. — Détermination de tous les cas dans lesquels il y a à la fois une intégrale du premier et une intégrale du second degré.	

CHAPITRE III.

	Pages.
<i>De la représentation géodésique de deux surfaces l'une sur l'autre....</i>	40
Problème de M. Beltrami : Déterminer toutes les surfaces qui peuvent être représentées sur le plan de telle manière que les géodésiques correspondent aux droites du plan. — Solution directe et complète de ce problème : les surfaces à courbure constante sont les seules qui puissent être représentées de cette manière sur le plan. — Problème de M. Dini : Déterminer tous les couples de surfaces tels que l'on puisse établir entre deux surfaces de chaque couple une correspondance dans laquelle les géodésiques correspondent aux géodésiques. — Solution de M. Dini. — Théorème de M. Tissot. — L'élément linéaire des surfaces cherchées se ramène à la forme de M. Liouville. — Application : propriété remarquable de la transformation homographique. — Solution nouvelle et directe des deux problèmes précédents. Si l'on cherche à déterminer les courbes pour lesquelles l'intégrale $\int f(u, v, v') du$ prise entre deux points donnés est maximum ou minimum, on est conduit à une équation différentielle du second ordre définissant les courbes cherchées. — Cette équation peut être considérée comme étant la plus générale du second ordre; et à chaque équation de cet ordre correspondent une infinité de fonctions $f(u, v, v')$. — Détermination effective de ces fonctions quand on sait intégrer l'équation différentielle. — Relations avec la théorie du multiplicateur de Jacobi. — Application à l'équation $v'' = 0$ et aux problèmes de MM. Beltrami et Dini.	

CHAPITRE IV.

<i>Intégrales homogènes de degré supérieur et intégrales d'une forme déterminée</i>	66
Division des intégrales en classes d'après le nombre de leurs facteurs linéaires distincts. — Équations aux dérivées partielles par lesquelles on exprime qu'il y a une intégrale d'une forme déterminée. — Application au cas où l'élément linéaire est exprimé au moyen des coordonnées symétriques. — Équations générales. — Première application; intégrale fractionnaire dont les deux termes sont linéaires par rapport à p et à q; la valeur correspondante de λ est l'intégrale générale de l'équation $E\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$; les solutions homogènes de cette équation fournissent l'élément linéaire de certaines surfaces spirales. — Intégrale à deux facteurs distincts; première méthode. — Un cas particulier de l'intégrale à trois facteurs. — Intégrale à deux facteurs distincts; réduction du problème à l'intégration d'une équation linéaire qui admet un nombre illimité de solutions homogènes.	

CHAPITRE V.

<i>Le plus court chemin entre deux points d'une surface.....</i>	86
Comparaison d'un segment de géodésique à tous les chemins infiniment voisins réunissant ses extrémités. — Considérations géométriques;	

enveloppe de toutes les géodésiques passant par un point. — Énoncé d'une propriété générale qui s'applique à un grand nombre de problèmes de maximum. — Méthode analytique de M. O. Bonnet. — Détermination des géodésiques infiniment voisines d'une géodésique donnée. — Deux théorèmes de Sturm sur les équations différentielles linéaires. — Application aux lignes géodésiques. — Formule qui donne la variation de longueur d'un arc de courbe quelconque. — Conditions auxquelles doit satisfaire le plus court chemin entre deux points d'une surface limitée d'une manière quelconque. — Extension que l'on peut donner au problème du plus court chemin. — Introduction de la notion de la *longueur réduite* d'un segment de géodésique due à M. Christoffel.

CHAPITRE VI.

La courbure géodésique et le théorème de Gauss..... 113

Définitions diverses de la courbure géodésique. — Généralisation de différentes propositions relatives à la courbure des lignes planes. — Définition due à M. Beltrami de la courbure géodésique. — Détermination de toutes les surfaces dont les lignes de courbure ont leur courbure géodésique constante. — Le théorème de Green pour une aire à connexion simple. — Formule de M. O. Bonnet. — Théorème de Gauss relatif à la courbure totale d'un polygone dont les côtés sont des lignes géodésiques. — Définition de l'angle de contingence géodésique. — Formule de M. Liouville, expression de la courbure totale en un point de la surface au moyen des courbures géodésiques des deux lignes coordonnées. — Application de cette formule à un problème de M. Tchebychef. — Le théorème de Green pour une aire à connexion multiple. — Applications diverses. — Le théorème de Gauss relatif à la courbure d'un polygone géodésique ne constitue pas une propriété caractéristique des lignes géodésiques.

CHAPITRE VII.

Les cercles géodésiques..... 140

Nouvelle application du théorème de Green ; généralisation du théorème des projections. — Expression analytique du rayon de courbure géodésique d'une courbe définie de la manière la plus générale par une équation quelconque en coordonnées curvilignes. — Étude des courbes (F) qui sont définies par cette propriété qu'en chacun de leurs points la courbure géodésique soit une fonction donnée à l'avance des coordonnées du point. — Équation du second ordre au moyen de laquelle on les détermine. — On peut, comme dans le cas des lignes géodésiques, ramener la détermination de ces courbes à l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre. — Propositions et propriétés de maximum ou de minimum analogues à celles des lignes géodésiques. — Des cercles géodésiques, c'est-à-dire des courbes dont la courbure géodésique est constante. — Détermination des cercles géodésiques pour toutes les surfaces applicables sur des surfaces de révolution. — Propriétés relatives à la courbure géodésique

dans les systèmes isothermes. — Systèmes orthogonaux composés de deux familles de cercles géodésiques. — Cas des surfaces à courbure constante.

CHAPITRE VIII.

Les triangles géodésiques et le théorème de Gauss..... 157

Du système de coordonnées polaires dans une surface quelconque. — Développement suivant les puissances de u de la courbure totale et de la quantité λ qui figure dans l'expression

$$ds^2 = du^2 + \lambda^2 dv^2$$

de l'élément linéaire. — Distance géodésique de deux points quelconques. — Son carré est développable en série. — Calcul des premiers termes de cette série. — Triangles géodésiques infiniment petits. — Théorème de Gauss. — Expression de la surface du triangle. — Application des résultats précédents à la détermination de quelques infiniment petits relatifs à une courbe quelconque tracée sur la surface. — Expressions de l'arc approchées jusqu'aux termes du cinquième ordre. — Étude d'une question posée par M. Christoffel : recherche des surfaces pour lesquelles il y a, entre les six éléments d'un triangle géodésique, une ou plusieurs relations indépendantes des coordonnées des sommets. — Travaux de MM. Weingarten et von Mangoldt. — Les surfaces à courbure constante sont les seules pour lesquelles il y ait plus d'une relation entre les six éléments; et le nombre de ces relations est égal à trois. — Les surfaces applicables sur des surfaces de révolution sont les seules pour lesquelles il y ait une relation, et une seule, entre les six éléments. — Démonstration de ce dernier résultat par la considération des triangles géodésiques infiniment aplatis.

LIVRE VII.

LA DÉFORMATION DES SURFACES.

CHAPITRE I.

Les paramètres différentiels..... 193

Formules élémentaires relatives à deux courbes tracées sur une surface.

— Définition des paramètres différentiels du premier ordre $\Delta\varphi$, $\Delta(\varphi, \psi)$, $\Theta(\varphi, \psi)$. — Paramètre du second ordre $\Delta_2\varphi$; méthode de M. Beltrami; formule analogue à celle de Green. — Expression du rayon de courbure géodésique d'une courbe au moyen des paramètres différentiels. — Les formations de M. Beltrami permettent d'obtenir tous les invariants différentiels de l'élément linéaire. — Emploi des paramètres différentiels dans la solution de divers problèmes où il s'agit de ramener l'élément linéaire à une forme spéciale. — Calcul des paramètres différentiels des fonctions les plus simples. — De l'emploi de

l'invariant du second ordre dans l'étude du problème de la représentation conforme et des systèmes isothermes. — Démonstration, due à M. Beltrami, du théorème de Gauss relatif à l'expression de la courbure totale.

CHAPITRE II.

Solution d'un problème fondamental : reconnaître si deux surfaces sont applicables l'une sur l'autre..... 218

Deux surfaces pour lesquelles la courbure totale est constante et a la même valeur sont toujours applicables l'une sur l'autre; mais on ne sait réaliser cette application des deux surfaces l'une sur l'autre que dans le cas où la courbure totale est nulle. — Si l'on savait déterminer les géodésiques des deux surfaces, on pourrait réaliser l'application; mais la détermination de ces géodésiques dépend de l'intégration d'une équation de Riccati. — Méthode permettant de reconnaître si deux surfaces à courbure variable sont applicables l'une sur l'autre. — Cas général. — Emploi des paramètres différentiels. — Cas particulier où les courbes sur lesquelles la courbure totale conserve une même valeur sont parallèles les unes aux autres. — Cas plus spécial encore où ces courbes forment en outre une famille isotherme; les surfaces sont alors applicables sur des surfaces de révolution. — Étude de deux problèmes particuliers; recherche des surfaces réglées qui sont applicables sur des surfaces de révolution; recherche des surfaces gauches qui sont applicables sur une autre surface réglée sans que les génératrices rectilignes soient des courbes correspondantes sur les deux surfaces.

CHAPITRE III.

Les formules de Gauss..... 242

Étude du commencement du Mémoire de Gauss. — Introduction des déterminants D, D', D'' . — Expression de $DD'' - D'^2$ en fonction des coefficients qui entrent dans l'élément linéaire et de leurs dérivées. — Relations différentielles entre D, D', D'' et les coefficients de l'élément linéaire. — Rapprochement avec les formules de M. Codazzi. — Équations différentielles des lignes asymptotiques, des lignes de courbure, équation aux rayons de courbure principaux écrites au moyen des quantités D, D', D'' . — Équations aux dérivées partielles du second ordre auxquelles satisfont les coordonnées rectangulaires d'un point de la surface, lorsqu'on connaît D, D', D'' . — Équation aux dérivées partielles qui détermine les surfaces admettant un élément linéaire donné. — Les caractéristiques de cette équation sont les lignes asymptotiques de la surface.

CHAPITRE IV.

Équation aux dérivées partielles des surfaces applicables sur une surface donnée..... 253

Méthode directe permettant d'obtenir immédiatement l'équation aux dérivées partielles dont dépend la recherche des surfaces applicables

sur une surface donnée. — Remarque de Bour sur une intégrale première de cette équation — Autres méthodes conduisant à la même équation. — Emploi des paramètres différentiels de M. Beltrami. — Développement de l'équation lorsqu'on choisit différents systèmes de coordonnées. Coordonnées symétriques. — Courbes parallèles et leurs trajectoires orthogonales. — Cas où la surface est définie par son équation en coordonnées rectilignes.

CHAPITRE V.

Étude de l'équation aux dérivées partielles dont dépend le problème de la déformation..... 263

Notions préliminaires sur les équations du second ordre qui sont linéaires par rapport à $r, s, t, rt - s^2$. — Problème de Cauchy. — Définition précise des caractéristiques. — Théorie géométrique de l'intégration, reposant sur les propriétés des caractéristiques. — Application à quelques exemples simples. — Étude particulière de l'équation dont dépend le problème de la déformation. — On peut énoncer ici le problème de Cauchy sous la forme suivante : Déformer la surface de telle manière qu'une courbe tracée sur elle prenne une forme donnée à l'avance. — Propriété remarquable des asymptotiques. — Problèmes divers. — Déformer une surface de telle manière qu'elle puisse s'inscrire dans une développable donnée, suivant une courbe donnée. — Nouvelles manières de poser le problème de la déformation. — Équations simultanées auxquelles doivent satisfaire les paramètres des deux familles d'asymptotiques. — Démonstration de diverses propositions sur les asymptotiques et les surfaces gauches. — Équations simultanées auxquelles satisfont les coordonnées curvilignes, considérées comme fonctions des paramètres des deux familles d'asymptotiques. — Application à un cas particulier.

CHAPITRE VI.

Déformation des surfaces gauches..... 293

Élément linéaire des surfaces gauches. — Surfaces dont les génératrices vont rencontrer le cercle de l'infini. — Surfaces qui admettent un plan directeur tangent au cercle de l'infini. — Détermination complète de toutes les surfaces gauches admettant un élément linéaire donné. — Différents problèmes relatifs à ces surfaces. — Autre méthode fondée sur l'emploi des formules de M. Codazzi. — Questions diverses relatives aux lignes asymptotiques et aux lignes de courbure. — Propriétés de la ligne de striction. — Surfaces réglées applicables sur les surfaces de révolution. — Il y a, dans ce cas, une relation linéaire entre les deux courbures de la ligne de striction.

CHAPITRE VII.

<i>Les théorèmes de M. Weingarten</i>	Pages. 316
Rappel des formules relatives au système de coordonnées formé par les lignes de courbure. — Relations entre les rayons de courbure et la représentation sphérique. — Premier théorème de M. Weingarten : Pour déterminer une surface dont les rayons de courbure sont liés par une relation, il faut ramener à une certaine forme l'élément linéaire de la sphère. — Applications : surfaces canaux; surfaces minima. — Nouvelle classe de surfaces découverte par M. Weingarten. — Intégration d'une équation aux dérivées partielles. — Second théorème de M. Weingarten. — Propositions générales relatives à la développée d'une surface. — Les deux nappes de la développée d'une surface W, c'est-à-dire d'une surface dont les rayons de courbure sont fonctions l'un de l'autre, sont applicables sur une surface de révolution dont l'élément linéaire dépend seulement de la relation entre les rayons de courbure. — Réciproque et démonstrations géométriques de M. Beltrami. — Applications. — On sait déterminer toutes les surfaces applicables sur le parabolôïde de révolution.	

CHAPITRE VIII.

<i>La surface des centres de courbure. Propriétés générales</i>	334
Rappel de différentes propositions relatives aux deux nappes de la développée. — Formules relatives à chacune de ces nappes : élément linéaire, lignes asymptotiques, lignes de courbure, rayons de courbure principaux. — Propositions relatives au contact de deux surfaces; existence de relations entre les éléments du même ordre des deux nappes de la développée. — Recherche de ces relations dans le cas du second ordre. — Parabolôïde des huit droites. — Théorème de M. Ribaucour relatif au cas où les lignes de courbure se correspondent sur les deux nappes de la développée. — Généralisation de certaines propriétés de la développée. — Théorèmes de MM. Beltrami et Laguerre relatifs à des droites entraînées dans le mouvement de déformation d'une surface. — Proposition de M. Ribaucour relative à des courbes situées dans les plans tangents d'une surface donnée.	

CHAPITRE IX.

<i>Propriétés diverses des surfaces W</i>	357
Première propriété : Théorème de M. Halphen, relation entre les courbures totales des deux nappes de la développée. — Deuxième propriété : Détermination par de simples quadratures des lignes de courbure de toute surface W; remarque de M. Weingarten. — Troisième propriété, due à M. Ribaucour : les lignes asymptotiques se correspondent sur les deux nappes de la développée; la véritable origine de cette remarquable proposition se trouve dans le fait que les asymptotiques sont les caractéristiques de l'équation aux dérivées partielles dont dépend le problème de la déformation d'une surface. — Propriété géomé-	

trique relative aux asymptotiques des développées pour la nouvelle classe de surfaces W découverte par M. Weingarten. — Recherche directe de toutes les surfaces qui possèdent cette propriété. — Détermination et construction géométrique de toutes les surfaces applicables sur le parabolôïde de révolution. — Rapports avec la théorie des surfaces minima.

CHAPITRE X.

Application des théorèmes de M. Weingarten aux surfaces pour lesquelles la courbure totale ou la courbure moyenne est constante.... 375

Remarque de M. O. Bonnet : La recherche des surfaces dont la courbure moyenne est constante se ramène à celle des surfaces pour lesquelles la courbure totale est constante. — Les surfaces à courbure constante négative considérées comme surfaces W . — Propriétés géométriques relatives aux lignes asymptotiques. — Transformation de M. Bonnet et de M. Lie; surfaces à courbure constante qu'on peut faire dériver d'une surface donnée. — Propriétés géométriques signalées par M. O. Bonnet; les lignes de courbure de toute surface à courbure moyenne constante forment un système isotherme. — Toute surface à courbure moyenne constante est applicable sur une infinité de surfaces avec conservation des rayons de courbure principaux aux points correspondants. — Développées des surfaces à courbure constante négative; elles sont applicables sur l'hélicoïde minimum. — Les surfaces à courbure constante considérées comme applicables sur des surfaces de révolution. — Étude des trois formes distinctes que l'on obtient pour l'élément linéaire d'une surface de révolution à courbure constante négative. — Surfaces complémentaires; elles sont applicables sur les surfaces de révolution engendrées par la révolution d'une tractrice ordinaire, d'une tractrice allongée ou raccourcie.

CHAPITRE XI.

Les surfaces à courbure totale négative..... 394

Surface pseudosphérique. — Représentation conforme de la partie réelle de la surface sur le demi-plan supérieur. — Étude des transformations qui conservent l'élément linéaire et qui réalisent, par suite, une application de la surface sur elle-même. — Représentation des géodésiques par des cercles ayant leur centre sur l'axe des x . — Distance géodésique de deux points. — Les cercles géodésiques sont représentés par des cercles. — Division des différents cercles géodésiques en trois espèces. — Les cercles situés tout entiers à distance finie ont seuls un centre; aire de ces cercles, longueur de leur circonférence. — Classification, due à M. Klein, des transformations qui conservent l'élément linéaire. — Analogies et différences entre la géométrie des diverses surfaces à courbure constante. — Géométrie non euclidienne. — Résolution d'un problème relatif au changement de coordonnées. — Considérations géométriques conduisant à la représentation conforme qui vient d'être étudiée. — Représentation de M. Beltrami dans laquelle les géodésiques ont des droites pour images. — Formules qui permettent de passer de l'une à l'autre de ces représentations.

CHAPITRE XII.

	Pages.
<i>Les transformations des surfaces à courbure constante</i>	420
Résumé des résultats obtenus dans les Chapitres précédents. — Méthode de transformation de M. Bianchi, complétée par M. Lie. — Théorèmes énoncés en 1870 par M. Ribaucour; leur démonstration par la Géométrie. — Conséquences et applications de la méthode de M. Bianchi; on suppose la surface initiale rapportée à ses lignes de courbure. — Système de deux relations du premier ordre entre deux solutions de l'équation aux dérivées partielles du second ordre dont dépend la recherche des surfaces à courbure constante. — Système orthogonal de M. Ribaucour. — Transformation de M. Bäcklund. — Propriétés relatives à la conservation des lignes de courbure. — Les transformations précédentes rattachées à des transformations beaucoup plus générales des équations aux dérivées partielles du second ordre.	

CHAPITRE XIII.

<i>Développements analytiques se rattachant aux transformations précédentes</i>	445
Détermination de surfaces particulières à courbure constante négative. — Rappel des surfaces de révolution et des hélicoïdes. — Surfaces à lignes de courbure planes ou sphériques dans un système. — Recherches de M. A. Enneper et de M. H. Dobriner. — Comment on exprime qu'une surface rapportée à ses lignes de courbure a ses lignes de courbure sphériques dans un système. — Application aux surfaces à courbure constante négative. — Intégration des deux équations auxquelles doit satisfaire simultanément la fonction ω qui se présente dans l'élément linéaire de la surface rapportée à ses lignes de courbure. — Propriété géométrique de la surface : les sphères qui contiennent les lignes de première courbure ont leurs centres en ligne droite. — Cette propriété permet de ramener à des quadratures la détermination des trois coordonnées d'un point de la surface. — Comment on exprime qu'une surface a ses lignes de courbure planes dans un système. — Application aux surfaces à courbure constante; si les lignes de courbure sont planes dans un système, leurs plans passent par une droite et, par suite, les lignes de courbure de l'autre système sont situées sur des sphères ayant leurs centres sur cette droite et coupant la surface à angle droit. — Détermination effective de ces surfaces. — Développements analytiques sur les méthodes de transformation de MM. Bianchi, Lie et Bäcklund. — On peut réduire l'application de ces méthodes à de simples calculs algébriques précédés d'un certain nombre de quadratures. — Les deux équations de Riccati qui se présentent dans cette théorie et qui contiennent un paramètre arbitraire. — Véritable origine de ces équations et leur réduction au système qui se présente dans l'application de la méthode de M. Bäcklund. — Théorème général résumant les résultats obtenus.	

CHAPITRE XIV.

Pages.

<i>Rapprochements et analogies entre les surfaces à courbure constante et les surfaces minima.....</i>	471
--	-----

Recherche des surfaces (M) telles que deux familles de lignes conjuguées aient pour tangentes des droites qui soient, en même temps, tangentes à une même surface du second degré. — Quand cette quadrique se réduit au cercle de l'infini, on doit retrouver les surfaces minima; mais, quand elle est de la classe la plus générale, la détermination des surfaces cherchées se ramène à la même équation aux dérivées partielles que celle des surfaces à courbure constante. — Signification géométrique des résultats précédents; généralisation des notions de distance et d'angle due à M. Cayley. — Relation avec les définitions données au Livre V, Chapitre VIII. — Les lignes géodésiques dans la Géométrie de M. Cayley. — Leur plan osculateur est toujours normal à la surface sur laquelle elles sont tracées. — Les lignes les plus courtes dans l'espace sont encore des lignes droites. — Généralisation des principales propriétés des lignes de courbure. — Formules analogues à celles d'Olinde Rodrigues et relatives aux lignes de courbure généralisées. — Les surfaces (M) étudiées au début de ce Chapitre ont, dans la Géométrie cayleyenne, leurs rayons de courbure égaux et de signes contraires; elles sont les seules qui jouissent de cette propriété. — Elles se rapprochent encore des surfaces minima par la propriété de rendre minimum la portion de l'aire cayleyenne comprise dans un contour donné. — Étude d'une transformation qui permet de transporter à la Géométrie euclidienne toute relation entre les angles dans la Géométrie de M. Cayley. — Cette transformation fait correspondre une sphère à un plan et un cercle à une droite. — Généralisation de la théorie des tangentes conjuguées de Dupin. — Propriétés diverses des surfaces (M') qui dérivent des surfaces (M) par la transformation précédente.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DE LA TROISIÈME PARTIE.