
TABLE DES MATIÈRES

DE LA PREMIÈRE PARTIE.

LIVRE I.

APPLICATIONS A LA GÉOMÉTRIE DE LA THÉORIE DES MOUVEMENTS RELATIFS.

CHAPITRE I.

	Pages.
<i>Du déplacement à un paramètre ; application à la théorie des courbes gauches</i>	I
Déplacement d'un système invariable ayant un point fixe. — La vitesse absolue d'un point rapporté au système invariable est la résultante de sa vitesse relative et de sa vitesse d'entraînement. — On donne d'abord les formules qui permettent de définir un déplacement fini, c'est-à-dire le passage d'un système fixe d'axes rectangulaires à un système mobile de même nature, et l'on rappelle les expressions des neuf cosinus en fonction des angles d'Euler. — On donne également les expressions des mêmes cosinus en fonction des quantités λ, μ, ν, ρ qui font connaître simplement la rotation finie par laquelle on réalise le passage des axes fixes aux axes mobiles. — Définition des paramètres quaternioniens.	
On définit le mouvement du trièdre mobile par les composantes p, q, r de la rotation instantanée, relatives aux axes de ce trièdre. — Expressions des dérivées des neuf cosinus. — Solution d'un problème fondamental : déterminer le mouvement quand on se donne les composantes p, q, r en fonction du temps. — La solution est unique et exige l'intégration d'un système linéaire à trois inconnues.	
Cas où le système mobile n'a plus de point fixe. — Il faut joindre à p, q, r les trois composantes par rapport aux axes mobiles de la vitesse de l'origine de ces axes. — Ici encore il y a un seul mouvement correspondant à des valeurs données de $\xi, \eta, \zeta, p, q, r$. — Composantes de la vitesse absolue d'un point rapporté aux axes mobiles. — Détermination de l'axe du mouvement hélicoïdal instantané. Cas où ce mouvement se réduit à une rotation. — Réduction du mouvement instantané à deux rotations. — Droites conjuguées.	
Application de la théorie précédente à l'étude des courbes gauches. — Les propriétés de ces courbes se déduisent de l'étude du mouvement d'un trièdre formé par la tangente à la courbe, la normale principale et la binormale. — Propriétés caractéristiques de ce déplacement : Les translations η, ζ et la rotation q sont nulles. Les deux compo-	

santes p et r représentent respectivement la torsion et la courbure de la courbe. — Distinction essentielle entre la courbure et la torsion. — Calcul de divers infiniment petits. — Théorie des développées. — Enveloppe du plan rectifiant. — Toute courbe pour laquelle le rapport de la courbure à la torsion est constant est une hélice tracée sur un cylindre quelconque. Ce cylindre est circulaire droit si la courbure et la torsion sont constantes. — Étude des courbes, dites de Bertrand, pour lesquelles les normales principales sont normales principales d'une autre courbe. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit, en général, qu'il y ait une seule relation entre la courbure et la torsion. — Relations entre les deux courbes qui ont mêmes normales principales. — Propriétés relatives à certaines droites conjuguées.

CHAPITRE II.

Sur l'intégration du système linéaire qui se présente dans la théorie précédente.....

27

Il s'agit du système qui détermine le mouvement quand on se donne les rotations p , q , r en fonction du temps. — Ce système est le type, ou la forme réduite, d'une classe importante de systèmes linéaires qui admettent une intégrale quadratique, à coefficients constants ou variables. — On voit immédiatement, presque sans calcul, qu'on peut l'intégrer complètement, si l'on en connaît deux solutions particulières. Mais, d'après un résultat plus caché, il suffira d'en connaître une solution particulière pour en achever l'intégration complète à l'aide d'une seule quadrature. Pour établir ce résultat, on reprend l'intégrale $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \text{const.}$ et l'on examine successivement le cas où la constante du second membre n'est pas nulle, et celui où elle est nulle.

Dans le premier cas, l'intégration du système linéaire se ramène à celle d'une seule équation de Riccati. — Propriétés générales de l'équation de Riccati. Forme de l'intégrale par rapport à la constante. Le rapport anharmonique de quatre solutions est constant. Cas où l'on connaît une, deux ou trois solutions particulières. Réduction à un système linéaire homogène à deux inconnues.

Application de ces propriétés générales à l'équation de Riccati qui se présente dans le problème actuel. La connaissance d'un seul système de cosinus vérifiant les trois équations fondamentales permet d'achever le problème par une seule quadrature portant sur une fonction réelle. — Rappel de la méthode par laquelle Euler avait établi ce résultat.

On arrive maintenant à l'étude des solutions du système fondamental pour lesquelles la somme $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ est nulle. On ramène leur détermination à celle d'un système linéaire à deux inconnues, un de ceux qu'on peut rattacher à l'équation de Riccati considérée plus haut. Son intégration complète permettra d'obtenir sans quadrature celle du système linéaire à trois inconnues. Si l'on en connaît une solution particulière, on en obtiendra une autre sans intégration, ce qui fournira l'intégrale générale, lorsque p , q , r seront fonctions réelles de t ; dans le cas contraire, il faudra une quadrature pour déduire l'intégrale générale de la solution particulière.

CHAPITRE III.

	Pages.
<i>Interprétation géométrique des deux méthodes employées dans le Chapitre précédent</i>	42
Étude des coordonnées, dites symétriques, sur la sphère. Forme de l'élément linéaire. Substitutions linéaires effectuées sur ces coordonnées qui reproduisent cet élément et transforment, par conséquent, une figure quelconque en une figure égale ou symétrique. — Formules qui expriment, à l'aide des coordonnées symétriques, la distance de deux points sur la sphère. — Définition de deux rapports anharmoniques attachés à un quadrilatère et explication géométrique de la réduction du problème traité au Chapitre précédent à l'intégration d'une seule équation de Riccati.	
Réduction de tout déplacement fini à une même substitution linéaire fractionnaire effectuée sur les deux coordonnées symétriques. On montre, lorsque cette substitution est connue, comment on obtient les paramètres quaternioniens qui définissent le déplacement. — Système de coordonnées symétriques imaginaires conjuguées employé dans la théorie moderne des fonctions.	
Étude du cône isotrope ou sphère de rayon nul. Cette sphère doit être considérée comme une surface double et, de plus, la distance de deux quelconques de ses points jouit de la même propriété que celle de deux points sur une droite : elle s'exprime rationnellement. — Généralisation du théorème de Ptolémée.	
Roulement du cône isotrope sur lui-même. — Tout déplacement fini s'obtient en soumettant les coordonnées u et v de chaque point à une substitution linéaire de coefficients constants. Relations entre les paramètres quaternioniens du déplacement et les coefficients de cette substitution. — Déplacement infiniment petit. Système de deux équations différentielles linéaires rattaché à ce déplacement et permettant de déterminer le mouvement quand on connaît les expressions des rotations p, q, r en fonction du temps. Ce système est précisément celui que l'on a rencontré au Chapitre précédent. — Indications historiques.	

CHAPITRE IV.

<i>Applications de la théorie précédente</i>	56
Extension de la théorie de Poinsot. — Détermination des mouvements dans lesquels il y a deux relations, données à l'avance, entre les rotations. — Détermination des courbes gauches dont la courbure et la torsion satisfont à une relation donnée. — Étude du cas où cette relation est linéaire. — Courbes à torsion constante.	

CHAPITRE V.

<i>Des déplacements à plusieurs variables indépendantes</i>	65
Différentes recherches de géométrie exigent la considération de déplacements qui dépendent, non plus d'un seul paramètre, mais de plusieurs paramètres distincts. On commence ici l'étude de ces déplacements, et l'on suppose d'abord que le système mobile, dont la position dépend	

de n paramètres t_1, t_2, \dots, t_n , ait un point fixe. Introduction de ce qu'on peut appeler les rotations partielles dans l'étude du déplacement infiniment petit. Équations aux dérivées partielles linéaires qui relient les neuf cosinus aux rotations partielles. Conditions d'intégrabilité auxquelles doivent satisfaire les rotations partielles. Quand ces équations sont vérifiées, il y a un déplacement, et un seul, correspondant aux valeurs données des rotations partielles. La démonstration directe de cette proposition conduit à un théorème important, qui sera utile dans la suite.

Cas général où le système mobile n'a pas de point fixe. Introduction des translations partielles. Relations différentielles entre ces translations. Expression des composantes D_x, D_y, D_z du déplacement infiniment petit d'un point du système mobile. Si les conditions d'intégrabilité auxquelles doivent satisfaire les rotations et les translations sont vérifiées, il y a un déplacement correspondant, et un seul. Méthode par laquelle, sans sortir du trièdre mobile, on démontre cette proposition fondamentale, après avoir retrouvé les conditions d'intégrabilité.

CHAPITRE VI.

Intégration simultanée des systèmes linéaires rencontrés dans la théorie précédente

75

Considérations générales sur le système linéaire fondamental auquel satisfont les trois groupes de cosinus, $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c''$. Il se compose de n groupes de trois équations, le groupe de rang i faisant connaître les dérivées des trois inconnues par rapport à la seule variable t_i . — Si l'on sait intégrer complètement les équations faisant partie de p groupes, la solution du problème pourra se ramener à celle d'un problème *identique* dans lequel le nombre des variables indépendantes sera diminué de p . — Si l'on connaît seulement une solution particulière des équations faisant partie de p groupes, il sera possible, sauf dans un cas exceptionnel, d'obtenir sans quadrature l'intégrale complète de ces équations et, par suite, d'appliquer la proposition précédente. Le cas exceptionnel auquel on vient de faire allusion ne peut se présenter que si les rotations partielles sont imaginaires et si la solution particulière satisfait à l'équation $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$; d'ailleurs quand il se présente, on peut, par de simples quadratures, obtenir la solution complète et générale du problème.

Remplacement des équations linéaires par un groupe d'équations simultanées de Riccati auxquelles doit satisfaire une variable unique. Étude des solutions communes à deux équations simultanées de Riccati. — Cas particulier où la somme $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ est nulle. On est ramené à un système linéaire ne contenant que deux fonctions inconnues. Une solution particulière de ce système suffit à donner, par une quadrature unique, la solution générale du problème proposé.

CHAPITRE VII.

Application de la théorie précédente aux déplacements qui dépendent de deux variables indépendantes

88

Les déplacements à deux variables indépendantes jouent un rôle parti-

culièrement important dans la théorie des surfaces. Il convient de les étudier complètement. — Application des formules générales. — Étude des mouvements infiniment petits. Notion de la vis due à Ball. Il y a deux déplacements, réels ou imaginaires, qui se réduisent à des rotations. — Théorème de Schönemann et Mannheim, qui permet de généraliser la notion du centre instantané et de construire les normales aux surfaces trajectoires de tous les points.

Étude de tous les déplacements infiniment petits qui peuvent se produire à partir d'une position donnée. Simplification des formules par un choix convenable des axes et des variables indépendantes. Les axes de tous les mouvements hélicoïdaux engendrent un conoïde que Plücker a le premier étudié. Expression du pas des différentes vis. Construction géométrique des formules. Propriétés du conoïde de Plücker : il est la seule surface réglée pour laquelle les projections d'un point de l'espace sur les génératrices rectilignes soient sur une courbe plane. Démonstration de cette proposition découverte par M. P. Appell. — Étude des relations qui existent entre le conoïde de Plücker et le complexe des droites qui sont perpendiculaires à ses génératrices.

Étude spéciale du cas particulier, envisagé par Ribaucour, où deux des déplacements infiniment petits sont des rotations autour d'axes concourants. — Dans ce cas, tous les déplacements se réduisent à des rotations autour d'axes passant par un même point et situés dans le même plan. Le mouvement peut être obtenu par le roulement d'une surface sur une autre surface qui est *applicable* sur la première. — Il y a alors un centre instantané de rotation, et les normales à toutes les surfaces trajectoires passent par un même point.

CHAPITRE VIII.

Premières notions sur les coordonnées curvilignes..... 112

Définition du système le plus général de coordonnées curvilignes. — Méthode de Gauss. — Élément linéaire d'une surface. — Coordonnées orthogonales. — Les surfaces de révolution rapportées à leurs méridiens et à leurs parallèles. — Rappel de la définition et des propriétés élémentaires de deux surfaces remarquables de révolution : la caténoïde et la surface pseudosphérique. — Surfaces de révolution qui partagent avec cette dernière la propriété d'avoir le produit de leurs rayons de courbure constant. — Des surfaces réglées et de leur élément linéaire. — Détermination des trajectoires orthogonales de leurs génératrices. — Élément linéaire des surfaces développables. — Les surfaces développables sont applicables sur le plan, et cela de telle manière que leurs génératrices rectilignes correspondent nécessairement à des droites du plan. — Réciproquement, toute surface applicable sur le plan est une surface développable. — Démonstration directe, donnée par Ossian Bonnet, de cette importante proposition.

CHAPITRE IX.

Surfaces définies par des propriétés cinématiques..... 127
Propriété cinématique commune aux surfaces de révolution, aux

cylindres et aux hélicoïdes. — Ces différentes surfaces peuvent être déplacées d'une manière continue sans cesser de coïncider avec elles-mêmes.

Définition des hélicoïdes les plus généraux. — Leur élément linéaire lorsqu'on forme un système de coordonnées curvilignes avec les hélices tracées sur la surface et leurs trajectoires orthogonales. — Théorème de Bour : La forme de l'élément linéaire ainsi obtenu convient à une double infinité d'hélicoïdes parmi lesquels se trouvent des surfaces de révolution, en nombre simplement infini. — Étude des surfaces de révolution qui sont toutes applicables les unes sur les autres. — Si l'on considère les points qui se correspondent sur toutes ces surfaces, le produit des rayons de courbure principaux de la surface est le même en tous ces points ; la tangente au méridien, prolongée jusqu'à l'axe, a la même longueur pour toutes les surfaces. — Application à la sphère et à la surface pseudosphérique.

Des surfaces les plus générales qui peuvent être engendrées par le mouvement d'une courbe invariable de forme. — Leur élément linéaire. — Application aux surfaces réglées. — Cas où le mouvement de la courbe invariable se réduit à une translation. — Surfaces de translation, leur étude directe. — Définition due à Lie des surfaces de translation. — Elles peuvent être considérées comme lieux des milieux de toutes les cordes qui joignent un point d'une courbe (C) à un point d'une autre courbe (C'). — Cette nouvelle définition montre bien qu'elles peuvent être engendrées de deux manières différentes par la translation d'une courbe invariable. — Propriété géométrique tout à fait générale des surfaces de translation : Les deux courbes dont la translation peut engendrer la surface déterminent sur cette surface un système de coordonnées curvilignes *conjuguées*, c'est-à-dire un système tel que les tangentes aux deux lignes coordonnées qui se croisent en chaque point de la surface sont conjuguées suivant la définition de Dupin. — Pour établir cette proposition, à laquelle la Géométrie conduirait aisément, on donne un théorème général, sur lequel on aura à revenir, relatif aux systèmes de coordonnées curvilignes qui sont formées de courbes conjuguées. — On revient aux surfaces les plus générales engendrées par le mouvement d'une courbe invariable pour examiner le cas spécial où cette courbe est plane et où les vitesses de tous ses points sont normales au plan qui la contient. — Élément linéaire de la surface. — Cas spécial où le plan de la courbe roule sur un cylindre. — Surfaces moulures cylindriques. — Bour a montré qu'il existe une infinité de telles surfaces applicables les unes sur les autres.

Extension de la méthode cinématique précédente au cas où la courbe qui engendre la surface varie en même temps de forme et de position. — Surfaces engendrées par un cercle. — Détermination des trajectoires orthogonales de tous les cercles de la surface. — Elle se ramène à l'intégration d'une équation de Riccati. — Étude du mouvement d'un système qui se déplace en variant de grandeur, mais en restant semblable à lui-même. — Loi de variation des vitesses de ses différents points. — Surfaces spirales de Maurice Lévy. — Leur élément linéaire. — Extension du théorème de Bour. — Il y a une double infinité de surfaces spirales applicables sur une surface spirale donnée.

CHAPITRE X.

	Pages.
<i>Sur une classe particulière de surfaces de translation.....</i>	151

On se propose, dans ce Chapitre, de déterminer toutes les surfaces qui peuvent, de deux ou de plusieurs manières, être considérées comme des surfaces de translation. Cette question, qui a été posée et résolue par Sophus Lie, a été aussi l'objet des recherches d'Henri Poincaré. On va en donner une solution nouvelle qui n'exige aucune connaissance de la théorie des fonctions abéliennes.

Énoncé précis du problème à résoudre. — A chaque solution du problème convenablement formulé correspondent trois surfaces distinctes, qui peuvent être regardées, de deux ou plusieurs manières, comme des surfaces de translation. — Résultat de la recherche : Les parallèles menées par un point fixe aux tangentes de l'une quelconque des courbes (C_i) dont la translation engendre la surface sont les génératrices d'un cône algébrique du quatrième ordre. — Détermination effective de ces courbes. — Démonstration directe du théorème d'Abel pour le problème particulier étudié. — Cas où le cône du quatrième ordre se décompose. — S'il se décompose en deux cônes du second ordre, l'une des surfaces correspondantes peut être regardée d'une infinité de manières comme une surface de translation. — Équation en coordonnées cartésiennes de cette surface.

LIVRE II.

DES DIFFÉRENTS SYSTÈMES DE COORDONNÉES CURVILIGNES.

CHAPITRE I.

<i>Des systèmes conjugués.....</i>	163
------------------------------------	-----

On commence l'étude des systèmes conjugués par l'énoncé et la démonstration d'une belle proposition de M. G. Kœnigs. Tandis qu'il semble impossible de déterminer des systèmes orthogonaux par des opérations qui ne comportent aucune intégration, il est toujours possible d'obtenir, *sur une surface quelconque*, sans aucune intégration, des systèmes à lignes conjuguées. Il suffit de prendre, comme première famille, les sections planes dont les plans passent par une droite quelconque (D) et, comme deuxième famille, les courbes de contact des cônes qui sont circonscrits à la surface et ont leurs sommets sur la droite (D). — Application de la proposition de M. Kœnigs à la solution d'un problème résolu par Joachimsthal : détermination des surfaces admettant un système de lignes de courbure planes dont les plans passent par une droite fixe. On démontre que les lignes de courbure de l'autre système sont sur des sphères qui coupent à angle droit la surface cherchée et l'on ramène le problème à la détermination des trajectoires orthogonales d'une famille de cercles situés dans un plan et dont les centres sont en ligne droite. — Digression sur les familles les plus générales de cercles dans le plan. La détermination de leurs trajectoires orthogonales dépend d'une équation de Riccati. — Notion

- des familles similaires de cercles introduite par V. Rouquet. — On peut définir, sans aucun signe de quadrature, la famille de cercles la plus générale et les trajectoires orthogonales de ces cercles. — Retour au problème proposé. Équations qui définissent les surfaces de Joachimsthal.
- On met en évidence le caractère projectif et dualistique de la définition des systèmes conjugués. — On peut rattacher à tout système conjugué deux équations linéaires aux dérivées partielles : l'une à laquelle satisfont les quatre coordonnées homogènes d'un point de la surface, l'autre à laquelle satisfont les quatre coordonnées du plan tangent. En dehors de ces deux équations, il n'y en a pas d'autre de même forme à laquelle satisfassent, soit les quatre coordonnées ponctuelles, soit les quatre coordonnées tangentielles,
- Application à la détermination de toutes les surfaces pour lesquelles il existe deux familles conjuguées formées exclusivement de courbes planes. — Indication d'un mode de génération de ces surfaces.
- Les polaires réciproques de ces surfaces sont celles sur lesquelles il existe deux familles conjuguées formées exclusivement de courbes de contact de cônes ou de cylindres circonscrits. — Étude du cas particulier où l'une des familles est formée des courbes de contact de cylindres circonscrits. — On essaye de déterminer des surfaces de cette catégorie applicables les unes sur les autres. On résout le problème pour les surfaces admettant deux familles de courbes conjuguées planes : les unes situées dans des plans parallèles, les autres dans des plans passant par une droite fixe perpendiculaire aux plans des sections parallèles. — Comme les surfaces du second degré admettent de trois manières différentes cette génération, on peut déterminer trois familles de surfaces applicables sur une surface à centre du second degré.

CHAPITRE II.

- Systèmes conjugués. Lignes asymptotiques*..... 185
- Application d'une des propositions précédentes à la détermination des surfaces à lignes de courbure planes dans les deux systèmes. — Résolution de l'équation aux variables mêlées dont dépend la solution de ce problème. — Cyclide de Dupin. — Il y a trois classes distinctes de surfaces à lignes de courbure planes. — On indique un mode de génération très simple de ces différentes surfaces.
- Retour à la théorie générale.* — Définition des caractéristiques d'une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre. — Réduction à une forme typique. — Cas où les caractéristiques sont confondues.
- Équations linéaires les plus générales auxquelles satisfont, soit les quatre coordonnées ponctuelles, soit les quatre coordonnées tangentielles. Leurs caractéristiques correspondent toujours à un système conjugué. — Cas particulier où l'on obtient le système conjugué formé par les lignes de courbure.
- Recherche des lignes asymptotiques.* — Leur définition est à la fois projective et dualistique. — Leur équation différentielle, soit en coordonnées ponctuelles, soit en coordonnées tangentielles. — Appli-

- cation nouvelle de la proposition de M. G. Kœnigs. Elle fournit un moyen de débarrasser du terme rectangle l'équation différentielle des lignes asymptotiques. — Détermination des lignes asymptotiques de quelques surfaces remarquables.
- Relations entre la théorie des lignes asymptotiques et celle des équations linéaires aux dérivées partielles.

CHAPITRE III.

- Des systèmes orthogonaux et isothermes*..... 206
- Division de la surface en carrés infiniment petits. Elle ne peut se réaliser qu'avec les systèmes isothermes. — Relations entre les systèmes isothermes et les coordonnées symétriques. — Sur toute surface, il existe une infinité de systèmes orthogonaux et isothermes. La connaissance d'un seul de ces systèmes entraîne celle de tous les autres. — Problème des Cartes géographiques. Sa solution pour toute surface de révolution et, en particulier, pour la sphère. — Projection de Mercator. — Projection stéréographique. — Surfaces du second degré. Leurs lignes de courbure forment un système isotherme pour lequel l'élément linéaire a une forme particulière qui se retrouvera dans la théorie des lignes géodésiques. — Différents moyens de faire la carte d'une portion d'ellipsoïde. — Propriétés générales des systèmes isothermes. — On peut se borner à étudier dans le plan tout ce qui concerne la substitution d'un système isotherme à un autre. — Relations diverses entre les fonctions d'une variable complexe et les systèmes isothermes. — Courbes d'égale partie réelle et d'égale partie imaginaire de la fonction. — Courbes d'égal module et d'égal argument. — Définition de quelques systèmes isothermes employés en Physique mathématique. — Cassiniennes. — Ovals de Descartes. — Détermination de tous les systèmes isothermes comprenant une famille de cercles. Dans ce cas la famille isotherme conjuguée est aussi composée de cercles; et les cercles de chaque famille ont même axe radical. On peut obtenir tous ces systèmes isothermes en appliquant l'inversion, soit au système de coordonnées rectilignes, soit au système de coordonnées polaires.

CHAPITRE IV.

- Représentation conforme des surfaces les unes sur les autres*..... 230
- On applique dans ce Chapitre les propriétés générales des systèmes isothermes à la résolution de différents problèmes relatifs aux Cartes géographiques et aux représentations conformes.
- Représentations conformes d'une surface sur elle-même. — Recherche de toutes celles pour lesquelles un système isotherme donné de la surface correspond à un autre système également donné. — Représentations conformes qui conservent un système isotherme donné. — Application aux surfaces de révolution. — Transformation de Lambert qui fait correspondre les parallèles aux parallèles et les méridiens aux méridiens.
- Emploi que Gauss a fait du même principe pour représenter d'une manière conforme l'ellipsoïde terrestre sur une sphère, le rapport de

similitude demeurant le même en tous les points d'un parallèle. Si l'on voulait appliquer cette méthode à un pays tel que la France, le rapport de similitude ne varierait pas, *dans toute l'étendue de la carte*, de $\frac{1}{100000}$ de sa valeur.

CHAPITRE V.

Du système orthogonal formé par les lignes de courbure..... 244

Équation différentielle des lignes de courbure en coordonnées cartésiennes. — Formation de la même équation à l'aide des coordonnées plückériennes de la normale. — Application à la détermination des lignes de courbure des surfaces définies par l'équation $x^m y^n z^p = C$. — Système triple orthogonal dont fait partie cette famille de surfaces. — Détermination des lignes de courbure de la surface lieu des points tels que la somme de leurs distances à deux droites qui se rencontrent à angle droit soit constante. — Formules d'Olinde Rodrigues relatives aux lignes de courbure. — Premières notions sur la méthode de représentation sphérique de Gauss. — Rapports avec la théorie des équations linéaires aux dérivées partielles. — Les lignes de courbure sont les caractéristiques de celle de ces équations qui, en même temps que x, y, z , admet $x^2 + y^2 + z^2$ comme solution particulière. — L'inversion conserve les lignes de courbure. — Premier exemple d'équations linéaires admettant des solutions particulières liées par une relation quadratique et homogène. — Système triple formé de surfaces cyclides à trois plans de symétrie. — Démonstration du célèbre théorème de Dupin relatif aux systèmes triples orthogonaux. — Cette démonstration se rattache à la considération d'un système de trois équations linéaires aux dérivées partielles auxquelles satisfont les coordonnées cartésiennes x, y, z , équations dont on peut déterminer simplement les coefficients lorsqu'on a calculé l'expression de l'élément linéaire de l'espace dans le système orthogonal employé.

CHAPITRE VI.

Les coordonnées pentasphériques..... 265

Équation d'une sphère mise sous une forme qui permet d'affecter un signe au rayon. — Système de cinq sphères deux à deux orthogonales. — Leur théorie se ramène à celle d'une substitution linéaire orthogonale à cinq variables. — Relations entre les puissances d'un point par rapport à cinq sphères orthogonales. — Coordonnées pentasphériques. — Distance de deux points, élément linéaire de l'espace, relations d'orthogonalité exprimées avec ce système de coordonnées. — Équation linéaire du second ordre à laquelle satisfont les cinq coordonnées pentasphériques. — Ses caractéristiques sont les lignes de courbure. — Système triple orthogonal formé avec les cyclides les plus générales. — De même que les coordonnées homogènes d'un point ou d'un plan ne changent pas quand on soumet la figure à une homographie, de même les coordonnées pentasphériques ne changent pas lorsqu'on effectue une inversion.

Formules principales relatives à la sphère. — Les six coordonnées homo-

gènes de la sphère. — La transformation de Lie qui fait correspondre une sphère à une ligne droite. — Deux définitions de cette transformation.

CHAPITRE VII.

Les lignes de courbure en coordonnées tangentielles..... 285

Cas où la surface est définie par son équation tangentielle. — Application à la surface de quatrième classe, normale à toutes les positions d'une droite invariable dont trois points décrivent trois plans rectangulaires. — Cas où les coordonnées tangentielles sont exprimées en fonction de deux paramètres. — Première solution du problème qui a pour objet la détermination des surfaces admettant une représentation sphérique donnée pour leurs lignes de courbure. — Développements sur un système particulier de coordonnées tangentielles employé par O. Bonnet dans l'étude des surfaces.

CHAPITRE VIII.

Applications diverses..... 301

La comparaison des résultats donnés précédemment pour les équations différentielles des lignes asymptotiques et des lignes de courbure conduit naturellement à une belle découverte de S. Lie, la transformation de contact dans laquelle les lignes de courbure d'une surface correspondent aux lignes asymptotiques de sa transformée. — Emploi du système de coordonnées tangentielles précédent pour définir une autre transformation découverte en 1870 par Ribaucour et dans laquelle, comme dans l'inversion, les lignes de courbure sont transformées. — Cette transformation a été nommée par Laguerre *transformation par directions réciproques*. — On donne sa construction géométrique et ses principales propriétés. — Parmi celles que l'on indique, il faut signaler la suivante : Les deux surfaces qui se correspondent peuvent être considérées comme les deux nappes de l'enveloppe d'une famille de sphères qui coupent un plan fixe sous un angle constant. — Les points homologues des deux surfaces sont sur un cercle qui coupe à angle droit le plan fixe ; le rapport anharmonique de ces deux points et de ceux où le cercle coupe le plan fixe est un nombre constant. — Comme toutes les transformations de contact qui conservent les lignes de courbure, la transformation par directions réciproques résulte d'un certain nombre d'inversions et de dilatations. Formules relatives à l'inversion dans le système de coordonnées tangentielles (α , β , ξ).

LIVRE III.

LES SURFACES MINIMA.

CHAPITRE I.

Résumé historique..... 319

L'équation aux dérivées partielles de Lagrange. — Mémoire de Meusnier

sur la courbure des surfaces. — Premières recherches de Monge. — Méthode rigoureuse de Legendre. — Détermination de quelques surfaces minima nouvelles par Scherk. — La surface minima réglée, le théorème de Catalan. — Recherches générales sur la théorie, par O. Bonnet, Catalan et Björling.

CHAPITRE II.

Les surfaces minima en coordonnées ponctuelles..... 332

Première condition à laquelle doit satisfaire la surface minima passant par un contour donné. — Pour que l'aire de cette surface soit plus petite que celle de toutes les autres surfaces infiniment voisines limitées au même contour, il faut que la somme des rayons de courbure soit égale à zéro. — On peut interpréter géométriquement cette propriété de la manière suivante : les deux familles de lignes de longueur nulle tracées sur la surface doivent former un réseau conjugué. — On déduit aisément de là que les surfaces minima sont des surfaces de translation, engendrées de deux manières différentes par la translation d'une ligne de longueur nulle. — Formules de Monge et de Legendre débarrassées de tout signe d'intégration. — Formules plus simples et plus élégantes d'Enneper et de Weierstrass. — Détermination de toutes les surfaces minima algébriques. — Détermination de toutes les surfaces minima réelles. — Relation établie par Weierstrass entre les surfaces minima et les fonctions d'une variable complexe. — A toute fonction de la variable complexe on peut faire correspondre une surface minima. Au contraire, à toute surface minima correspondent deux fonctions de la variable complexe, qui sont différentes en général.

CHAPITRE III.

Les surfaces minima en coordonnées tangentielles..... 347

Formules relatives au plan tangent et à la normale. — Nouvelle méthode d'intégration de l'équation aux dérivées partielles des surfaces minima ; on emploie le système de coordonnées tangentielles étudié au n° 165. — Équation finie qui représente la surface minima la plus générale quand on adopte un système quelconque de coordonnées tangentielles. — Quand la surface minima est donnée *a priori*, on indique comment on obtiendra les expressions des fonctions $\mathcal{F}(u)$, $\mathcal{F}_1(u_1)$, $f(u)$, $f_1(u_1)$ qui caractérisent cette surface. — Application à l'hélicoïde gauche à plan directeur.

Détermination des lignes de courbure et des lignes asymptotiques des surfaces minima. Théorème de Michael Roberts. Cette détermination se fait par des quadratures, qui sont les mêmes pour les deux séries de lignes. — Les formules relatives aux coordonnées tangentielles permettent de résoudre une question importante et d'indiquer les transformations que subissent les fonctions $f(u)$, $f_1(u_1)$, $\mathcal{F}(u)$, $\mathcal{F}_1(u_1)$ quand on déplace la surface ou, ce qui revient au même, lorsqu'on effectue un changement de coordonnées. — Application des résultats obtenus à la détermination de toutes les surfaces minima qui sont des hélicoïdes, des surfaces de révolution ou des surfaces spirales.

Détermination de toutes les surfaces minima qui peuvent, de plusieurs manières, et par conséquent ici d'une infinité de manières, être considérées comme des surfaces de translation.

CHAPITRE IV.

Représentations conformes des surfaces minima..... 365

Élément linéaire de la surface minima et de sa représentation sphérique.

— La représentation sphérique réalise un tracé géographique de la surface minima sur la sphère. — Cette propriété est caractéristique, et, si l'on fait abstraction de la sphère, pour laquelle elle est évidente, elle appartient aux seules surfaces minima. — En laissant de côté encore la sphère, les surfaces minima sont les seules pour lesquelles un système orthogonal, tracé sur la surface et différent de celui qui est formé par les lignes de courbure, ait pour représentation sphérique un système orthogonal. — Problème de Minding; extension à une surface quelconque de la définition des méridiens et des parallèles. Les méridiens sont les courbes pour lesquelles la normale est parallèle à un plan vertical; les parallèles sont les courbes pour lesquelles la normale fait un angle constant avec la verticale. — Recherche des surfaces pour lesquelles les méridiens et les parallèles forment un système orthogonal. Ce sont, ou bien des surfaces moulures, ou bien des surfaces minima.

Représentations conformes obtenues par Riemann de la surface minima sur le plan. Elles font correspondre aux lignes de courbure de la surface deux systèmes de droites rectangulaires dans le plan. — Dans le tracé géographique sur la sphère, les lignes de courbure qui forment sur la surface un système isotherme admettent nécessairement pour représentation sphérique un système isotherme. — Théorème de Bour. — Recherche des surfaces minima à lignes de courbure planes. — Si l'une des familles est composée de courbes planes, il en est de même de l'autre. — Surface transcendante d'Ossian Bonnet. — Surface algébrique d'Enneper. Sa construction et ses propriétés principales.

Autres représentations conformes sur le plan indiquées par Riemann et dans lesquelles une famille de sections de la surface par des plans parallèles est représentée par une famille de droites parallèles.

CHAPITRE V.

La surface adjointe d'O. Bonnet..... 379

Définition des surfaces minima associées à une surface donnée. — La surface adjointe d'O. Bonnet. — Quand on connaît une surface minima on peut obtenir la surface adjointe par des différentiations et des éliminations, sans aucun signe de quadrature; mais il importe de connaître des formules de M. Schwarz qui exigent, au contraire, l'emploi de deux quadratures.

Si deux surfaces sont applicables l'une sur l'autre et si les plans tangents aux points correspondants sont parallèles, elles sont nécessairement des surfaces minima associées. — Examen d'un problème posé par Mathet: Deux surfaces peuvent-elles se correspondre point par point

avec similitude des éléments infiniment petits, les éléments correspondants faisant un angle constant.

Propriétés relatives aux lignes de courbure et aux lignes asymptotiques des surfaces associées. — Détermination de toutes les surfaces minima applicables sur une surface minima donnée, sur une surface de révolution, ou sur une surface spirale.

CHAPITRE VI.

<i>Les formules de Monge et leur interprétation géométrique.....</i>	397
Recherches de Lie. — Génération de toute surface minima par la translation de deux courbes minima. — Étude de ce mode de génération, détermination nouvelle des surfaces algébriques et des surfaces réelles. — Surfaces minima doubles. — Détermination des surfaces doubles réelles. — Courbes minima qui sont identiques à leurs conjuguées. — Les surfaces minima dans le premier système de coordonnées tangentielles étudié au Livre II, Chap. VII. — Propriété géométrique qui distingue les surfaces doubles des surfaces simples. — Surfaces découvertes par Möbius et dans lesquelles on peut passer d'une face à l'autre par un chemin continu.	

CHAPITRE VII.

<i>Les surfaces minima algébriques.....</i>	422
Détermination de la classe et de l'ordre de la surface minima algébrique engendrée par la translation de deux courbes minima données. — Application au cas particulier où la fonction $f(u)$ est rationnelle. — Détermination de la surface minima réelle, simple ou double, de la classe la moins élevée. — Points à l'infini des surfaces minima. — La section de la surface par le plan de l'infini se compose exclusivement de droites simples ou multiples. — Points multiples à distance finie. — Surfaces minima à point conique.	

CHAPITRE VIII.

<i>Les formules de M. Schwarz.....</i>	446
Détermination de la surface minima tangente à une développable donnée suivant une courbe donnée. — Application à ce problème des résultats généraux que la théorie des équations aux dérivées partielles doit à Cauchy. — Formules de M. Schwarz. — Leur démonstration par Lie. — Surface minima passant par une droite réelle; la droite est toujours un axe de symétrie de la surface. — Surface minima réglée, détermination nouvelle de cette surface. — Surface minima passant par une courbe plane. — Cas où cette courbe doit être une ligne de courbure ou une ligne géodésique. — Théorème d'Henneberg et de Lie. — Surface minima admettant une conique pour ligne géodésique.	
<i>Application de la méthode de M. Schwarz à la détermination de la surface, découverte par Riemann, qui est engendrée par un cercle dont le plan se meut parallèlement à un plan fixe.</i>	

CHAPITRE IX.

	Pages.
<i>Surfaces minima algébriques inscrites dans une développable algébrique.</i>	465
Cas où la développable est un cylindre. — Le problème n'est possible que si la section droite est rectifiable. — Solution analytique du problème proposé. — Première solution géométrique. — Construction générale des surfaces minima algébriques inscrites dans une développable algébrique. — Théorèmes relatifs à des cas particuliers donnés par M. Lie. — Deuxième solution géométrique. — Génération nouvelle des surfaces minima due à Ribaucour. — Définition et principale propriété des <i>congruences isotropes</i> . — Le problème se ramène à la détermination d'une surface réglée dont la ligne de striction doit satisfaire à une condition donnée.	

CHAPITRE X.

<i>Le problème de Plateau. Détermination de la surface minima passant par un contour donné composé de lignes droites, ou de plans que la surface doit couper normalement.....</i>	490
Historique. — Indication des travaux de Riemann, de Weierstrass et de M. Schwarz. — Exposition générale de la méthode à suivre dans le cas où il n'y a pas de point de ramification. — Surface minima passant par deux droites, — coupant à angle droit deux plans donnés et contenant une droite donnée, — passant par trois droites, dont l'une coupe les deux autres, — passant par les quatre côtés d'un quadrilatère gauche quelconque. — Introduction des points de ramification. — Propriétés géométriques relatives à ces points. — Solution générale du problème proposé.	

CHAPITRE XI.

<i>Représentation conforme des aires planes.....</i>	500
Énoncé du problème à résoudre : faire la représentation conforme d'une aire plane à connexion simple sur une autre aire donnée de même connexion. On peut ramener ce problème au suivant : effectuer la représentation conforme d'une aire donnée (A) sur l'aire d'un cercle de rayon donné, choisi une fois pour toutes. On rappelle les résultats acquis sur ce sujet par les très nombreuses recherches que, depuis Riemann, les géomètres ont consacrées à cette étude, aussi importante pour l'Analyse que pour la Physique mathématique. — Le problème est ramené à la recherche d'une fonction de la variable complexe qui satisfait à des conditions bien déterminées dans l'intérieur de l'aire (A). Application à la portion de l'aire du plan qui se trouve au-dessus de l'axe des x . — Principe posé par M. Schwarz pour résoudre les problèmes de représentation conforme auxquels on a été conduit dans le Chapitre précédent. — Application de ce principe aux aires limitées par des droites. — Cas particulier du triangle et du rectangle. — Des aires limitées par des arcs de cercle. On est conduit à intégrer une équation linéaire dont les coefficients sont connus. — Cas particulier du triangle formé par trois arcs de cercle. — Projection stéréographique du triangle formé par trois arcs de grand cercle de la sphère. Représentation conforme, due à M. Schwarz, d'une aire elliptique sur une aire circulaire.	

CHAPITRE XII.

	Pages.
<i>Le problème de Plateau. Applications.....</i>	527
<p>Surface minima limitée par deux droites quelconques. — Surface minima limitée par deux droites qui se coupent et par un plan, qui rencontre les deux droites, et que la surface doit couper à angle droit. — Surface minima limitée par trois droites, dont l'une rencontre les deux autres. — Surface minima limitée par les côtés d'un quadrilatère gauche. Équation linéaire du second ordre dont dépend la solution du problème; formes diverses que l'on peut donner à cette équation. — Cas particulier où le quadrilatère a un plan de symétrie. — Après ces applications particulières, on discute les cas les plus généraux et l'on montre qu'il est nécessaire d'élargir les hypothèses faites sur les deux représentations conformes de la surface en admettant l'existence de <i>points de ramification</i>.</p>	

CHAPITRE XIII.

<i>Les Formules de Weierstrass.....</i>	547
<p>Forme nouvelle, due à Weierstrass, sous laquelle on peut mettre les équations qui définissent une surface minima. — Formules relatives à une transformation de coordonnées ou à un déplacement de la surface. — Équation linéaire du second ordre à laquelle satisfont les deux fonctions G et H. — Définition d'une <i>famille</i> de surface minima. — Application à la détermination de la surface minima passant par un contour donné. — Formation de l'équation linéaire correspondant à cette surface. — Indication des questions qui resteront à résoudre après la formation de cette équation. — Propriétés géométriques de la famille de surfaces minima définie par cette équation.</p>	

CHAPITRE XIV.

<i>Applications diverses.....</i>	573
<p>Méthode inverse dans laquelle on prend comme point de départ certaines équations différentielles linéaires dont on connaît l'intégrale générale. — Surfaces que l'on peut déduire de l'équation à laquelle satisfait la série hypergéométrique de Gauss. — Surfaces déduites de la forme $A \prod (t-a)^\alpha$ adoptée pour G(t) et H(t). — Surface minima limitée par une ligne brisée plane et une droite parallèle au plan de la ligne brisée. — Problème de Gergonne. — Surface déduites de la forme $A \prod \Theta^\alpha(t-a) \prod H^\beta(t-b)$ adoptée pour les fonctions fondamentales, Θ et H désignant ici les fonctions de Jacobi. — Surface minima limitée par deux polygones fermés situés dans des plans parallèles. — Remarque générale sur les moyens de multiplier le nombre des solutions du problème. — Surface passant par trois droites situées d'une manière quelconque dans l'espace.</p>	