

TABLE DES MATIÈRES

DE LA SECONDE PARTIE.

LIVRE IV.

LES CONGRUENCES ET LES ÉQUATIONS LINÉAIRES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.

CHAPITRE I.

	Pages.
<i>Notions générales sur les congruences.....</i>	1
Définition d'une congruence de courbes. — Il passe un nombre limité de courbes de la congruence par un point quelconque de l'espace. — Mais il peut y avoir des cas d'exception de deux espèces différentes. — Ce que l'on appelle surfaces de la congruence. — Propriétés de leurs plans tangents. — Définition des points focaux d'une courbe de la congruence. — Détermination dans quelques cas simples du nombre et de l'ordre des points focaux. — Définition de la surface focale. — Ses relations de contact avec les courbes et les surfaces de la congruence. — On retrouve la surface focale en essayant de résoudre le problème suivant : assembler des courbes de la congruence de telle manière qu'elles aient une enveloppe. — On démontre que cette enveloppe sera nécessairement sur une des nappes de la surface focale, la solution complète du problème exigeant l'intégration d'une équation différentielle du premier ordre. — Relation entre l'ordre du contact des courbes de la congruence avec la surface focale et le degré de multiplicité des points focaux. — Cas où les courbes de la congruence rencontrent toutes une courbe fixe. — Application des principes précédents aux congruences rectilignes. — Ce que l'on appelle ordre et classe d'une telle congruence. — La surface focale peut être réelle ou imaginaire; les droites de la congruence sont des tangentes doubles de cette surface; mais la réciproque n'est pas nécessairement vraie. — On peut en général distribuer les droites de la congruence en deux séries, réelles ou imaginaires, de développables dont la détermination complète exige l'intégration d'une équation différentielle du premier ordre et du second degré. — Sur chaque nappe de la surface focale, les courbes correspondantes aux deux séries de développables forment un système conjugué. — Réciproquement, si l'on connaît sur une surface un système conjugué, on peut en déduire deux congruences rectilignes pour lesquelles on saura	

déterminer sans intégration les deux séries de développables formées par les droites de la congruence. — Cas particulier où l'une des nappes de la surface focale se réduit à une courbe. — Une première série de développables est formée par les cônes qu'engendrent les droites passant par un même point de cette courbe. — Formation de l'équation différentielle du premier ordre et du premier degré qui définit la seconde série de développables. — Cas où la seconde nappe de la surface focale devient une développable. — Dans ce cas l'équation différentielle précédente se réduit à une équation de Riccati. — Applications diverses. — Retour à la théorie générale. — Toutes les fois que l'on connaît un système conjugué sur une surface, on peut en déduire une suite, en général illimitée dans les deux sens, de surfaces sur lesquelles on connaîtra également un système conjugué. — La mise en œuvre analytique de cette importante proposition conduit à une méthode de transformation des équations linéaires aux dérivées partielles que Laplace a fait connaître en 1773 et que l'on étudiera dans le Chapitre suivant.

CHAPITRE II.

<i>La méthode de Laplace</i>	23
Les deux cas d'intégrabilité immédiate. — Définition des invariants h et k ; leurs propriétés. — Formes réduites. — Équations à invariants égaux. — Méthode de Laplace; première substitution, les invariants de l'équation transformée; deuxième substitution. — Définition de la suite de Laplace, expression de x en fonction de x_i . — Suites périodiques. — Forme générale de la valeur de x lorsqu'une des équations de la suite a un de ses invariants nul et peut être intégrée. — Proposition réciproque. — Détermination de toutes les équations pour lesquelles la suite de Laplace est limitée d'un seul côté. — Recherche des équations pour lesquelles la suite se termine dans les deux sens. — Première solution; théorème fondamental. — Deuxième solution; vérification directe du résultat. — Étude des expressions auxquelles on est conduit. — Rappel des recherches de Moutard.	

CHAPITRE III.

<i>L'équation d'Euler et de Poisson</i>	54
Indications historiques. — Forme réduite de l'équation à étudier. — Cas particulier où les deux constantes β , β' qui y figurent deviennent égales; formes diverses de l'équation. — Solutions particulières homogènes ou entières. — Solutions particulières qui sont le produit d'une fonction de x par une fonction de y . — Invariants de l'équation. — Propriété fondamentale relative aux substitutions linéaires; cas particulier où β , β' sont égaux. — Application de la méthode de Laplace. — Recherche directe de l'intégrale dans le cas où la méthode de Laplace peut fournir cette intégrale. — Étude du cas où la suite de Laplace relative à l'équation est illimitée dans les deux sens; on peut ramener β et β' à être compris entre zéro et 1. — Intégrale de Poisson et de M. Appell. — Cas limite où l'on a $\beta + \beta' = 1$. — Indi-	

cation d'un problème de Géométrie, déjà étudié au Tome I, qui se ramène à l'intégration de l'équation $E\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

CHAPITRE IV.

<i>La méthode de Riemann</i>	71
Rappel des conditions d'intégrabilité d'une expression différentielle $\varphi(x, y, y', \dots, y^{(n)})$. — Indication d'une théorie analogue dans le cas de deux variables indépendantes. — De l'équation linéaire adjointe à une équation donnée. — Application au second ordre et, en particulier, aux équations de Laplace. — Méthode de Riemann. — Si l'on connaît une certaine solution de l'équation adjointe, on pourra déterminer toutes les solutions de l'équation proposée qui prennent des valeurs données, ainsi qu'une de leurs dérivées premières, sur une courbe choisie arbitrairement. — Cas particulier où cette courbe se réduit à deux portions de droite parallèles aux axes; il suffit alors de se donner les valeurs de la solution cherchée sur ces deux droites. — La solution particulière de l'équation adjointe dont il faut faire usage peut être définie comme solution de l'équation proposée. — Détermination de cette solution dans le cas de l'équation $E(\beta, \beta')$. — Étude particulière et directe de l'équation dite <i>des télégraphistes</i>. — On peut démontrer que la formule générale, due à M. Appell, donne effectivement toutes les intégrales de l'équation $E(\beta, \beta')$. — On établit ensuite pour l'équation linéaire la plus générale et par la méthode des fonctions majorantes que l'on peut toujours obtenir la fonction dont la méthode de Riemann suppose l'existence, et même établir ce résultat plus général que toute solution de l'équation de Laplace est définie, sous certaines conditions de continuité, par la condition de prendre des valeurs données pour tous les points situés sur deux parallèles aux axes. — Démonstration de cette proposition essentielle par les méthodes d'approximation de M. Émile Picard. — Relations entre une équation linéaire de Laplace et son adjointe. — Définition proposée pour l'intégrale générale d'une équation aux dérivées partielles. — L'intégration d'une telle équation et celle de son adjointe sont deux problèmes équivalents.	

CHAPITRE V.

<i>L'équation adjointe de Lagrange et les équations linéaires d'ordre impair équivalentes à leur adjointe</i>	112
Définition de l'équation adjointe à une équation linéaire donnée, à une seule variable indépendante. — Relation de réciprocity entre les deux équations; chacune d'elles est l'adjointe de l'autre. — Relations entre deux systèmes fondamentaux d'intégrales se rapportant respectivement aux deux équations. — Intégration d'une équation linéaire avec second membre par l'application des propositions établies. — Forme remarquable que l'on peut donner aux premiers membres de deux équations linéaires adjointes l'une à l'autre. — Équations linéaires	

d'ordre impair équivalentes à leur adjointe. — Propriété caractéristique; le premier membre devient une dérivée exacte après sa multiplication par la fonction inconnue. — Étude de l'intégrale du second degré. — Relations quadratiques entre les intégrales particulières et leurs dérivées de même ordre. — Expression sans aucun signe de quadrature du système le plus général de solutions particulières d'une équation linéaire d'ordre impair équivalente à son adjointe. — Formation de toutes les équations d'ordre impair équivalentes à leur adjointe.

CHAPITRE VI.

Compléments et solutions nouvelles des problèmes résolus au Chapitre II 135

Étude nouvelle du cas où la suite de Laplace se termine dans un sens. — Calcul direct des invariants pour les différentes équations de la suite. — Expression précise de la solution générale pour chacune de ces équations. — Relations entre les intégrales générales de deux et de trois équations consécutives de la suite. — Intégrale générale de l'équation adjointe. — Application au cas où la suite de Laplace doit se terminer dans les deux sens; nouvelle solution du problème résolu au Chapitre II. — Relations entre l'équation proposée et son adjointe. — Indication de trois formes différentes sous lesquelles on peut mettre l'intégrale générale de l'équation aux dérivées partielles.

CHAPITRE VII.

Les équations à invariants égaux 150

Rappel des propositions déjà signalées relativement aux équations dont les invariants sont égaux. — Emploi des solutions données au Chapitre précédent. — Condition nécessaire et suffisante pour que l'équation proposée ait des invariants égaux et soit intégrable par la méthode de Laplace. — Détermination de toutes les équations à invariants égaux dont l'intégrale peut être obtenue sous forme explicite. — Deuxième solution de ce problème. — Théorème de Moutard. — Expression précise de la solution générale. — L'emploi du théorème de Moutard permet d'obtenir toutes les équations dont la méthode de Laplace peut donner l'intégrale générale.

CHAPITRE VIII.

La résolution des équations linéaires les unes par les autres 178

Définition des expressions (m, n) . — Transformation que subit une telle expression quand on applique la méthode de Laplace. — Une expression (m, n) est définie, en général, à un facteur près, par la condition de s'annuler quand on y remplace x par $m + n$ solutions particulières de l'équation proposée. — Discussion des cas exceptionnels dans lesquels cette proposition se trouve en défaut. — Détermination de toutes les expressions (m, n) qui satisfont à une équation linéaire

du second ordre. — La méthode de Laplace est comprise comme cas limite dans celles qui résultent de l'emploi des expressions (m, n) les plus générales. — Recherche de la fonction la plus générale satisfaisant à une équation du second ordre et définie par la quadrature $\int (P dx + Q dy)$ où P et Q sont des fonctions linéaires de z et de ses dérivées. — Application au cas où P et Q contiennent les dérivées jusqu'au premier ordre seulement. — Extension au cas de deux variables des propriétés des systèmes adjoints. — L'intégration de l'une quelconque des deux équations, ponctuelle ou tangentielle, relatives à un système conjugué tracé sur une surface quelconque se ramène à celle de l'autre.

CHAPITRE IX.

Les équations harmoniques. Applications analytiques des propositions développées dans les deux Chapitres précédents. 206

Définition des équations et des solutions harmoniques. — Groupes de quatre solutions liées par une équation quadratique. — Application du théorème de Moutard au cas où l'on emploie une solution particulière harmonique. — Théorème relatif aux équations linéaires de la forme

$$y'' = y [\varphi(t) + h].$$

— D'une telle équation, lorsqu'on sait l'intégrer pour toutes les valeurs de h , on peut déduire une infinité d'autres équations de même forme que l'on saura intégrer pour toutes les valeurs de h . — Caractère distinctif de toutes les équations linéaires qui dérivent ainsi d'une même équation. — Étude d'une transformation particulière qui permet de passer d'une équation harmonique à d'autres équations harmoniques. — Formule générale permettant de rattacher à toute solution non harmonique d'une équation harmonique une infinité de solutions particulières nouvelles. — Reconnaître si une équation à invariants égaux est une équation harmonique. — Ce problème est équivalent au suivant : Reconnaître si l'élément linéaire d'une surface est réductible à la forme

$$ds^2 = [\varphi(u) - \psi(v)] (du^2 + dv^2).$$

— Application à l'équation d'Euler. — Étude d'une équation aux dérivées partielles plus générale. — Indication de quelques sujets de recherche auxquels conduisent les propositions développées dans ce Chapitre.

CHAPITRE X.

Applications géométriques. 233

Détermination de toutes les surfaces sur lesquelles les développables d'une congruence donnée interceptent un réseau conjugué. — L'intégration d'une seule équation linéaire aux dérivées partielles permet de résoudre ce problème pour une suite illimitée de congruences

rectilignes. — Problème inverse: Étant donné un système conjugué tracé sur une surface, trouver toutes les congruences dont les développables interceptent sur la surface ce réseau conjugué. — Double solution de ce problème par l'emploi des deux équations, ponctuelle et tangentielle, relatives au système conjugué. — Troisième problème: Étant donnés une surface (S) et un réseau conjugué sur cette surface, déterminer toutes les surfaces (S_1) telles que les développables d'une même congruence inconnue interceptent sur (S_1) un réseau conjugué et sur (S) le réseau donné. — Relations géométriques entre les deux surfaces (S) et (S_1) . — Application au cas particulier où l'on établit une correspondance entre deux surfaces quelconques par la condition que les plans tangents aux points correspondants se coupent suivant une droite située dans un plan fixe. — Cas où le plan fixe est rejeté à l'infini. — Correspondance de Steiner. — Application à l'Optique géométrique.

CHAPITRE XI.

Les surfaces à lignes de courbure isothermes..... 253

Problème de Christoffel. — Recherche de tous les cas dans lesquels la correspondance par plans tangents parallèles établie entre deux surfaces détermine un tracé géographique de l'une sur l'autre. — Différentes solutions déjà connues de ce problème; les surfaces homothétiques, deux surfaces minima quelconques. — Solution nouvelle. — Elle est fournie par des surfaces à lignes de courbure isothermes. — Théorème de Bour et de Christoffel. — Application aux surfaces minima. — Les surfaces dont la courbure moyenne est constante ont leurs lignes de courbure isothermes, c'est-à-dire elles sont isothermiques. — On peut faire dériver de toute surface isothermique une infinité de surfaces isothermiques nouvelles. — Formation de l'équation aux dérivées partielles du quatrième ordre qui caractérise les surfaces isothermiques. — Seconde propriété caractéristique: L'équation ponctuelle relative au système conjugué formé par les lignes de courbure doit avoir ses deux invariants égaux. — Applications.

CHAPITRE XII.

Trajectoires orthogonales d'une famille de surfaces..... 270

Condition pour que les courbes d'une congruence définie par deux équations différentielles du premier ordre soient normales à une famille de surfaces. — Interprétation géométrique de la relation analytique à laquelle on est conduit. — Condition nécessaire et suffisante pour que les droites d'une congruence soient les normales d'une surface. — Propriétés relatives aux deux nappes de la surface des centres de courbure. — Intégrale première, obtenue par la Géométrie, de l'équation différentielle des lignes géodésiques tracées sur une surface du second degré. — Étude du cas où l'une des nappes de la surface des centres se réduit à une courbe. — Surface à lignes de courbure circulaires; cyclide de Dupin. — Condition pour que les courbes

d'une congruence admettent une famille de surfaces trajectoires orthogonales lorsque l'on connaît les équations en termes finis qui définissent chaque courbe de la congruence.

CHAPITRE XIII.

Droites normales à une surface..... 287

Théorie directe pour les congruences rectilignes. — Condition pour que des droites partant des différents points d'une surface soient normales à une autre surface. — Remarque d'Hamilton. — Équation aux dérivées partielles d'une famille de surfaces parallèles. — Applications. — Théorème de Malus. — Propositions de Dupin relatives aux cas où les développables formées par les rayons incidents ne sont pas détruites par la réflexion. — Définition des axes optiques d'une surface. — Pour que des rayons incidents normaux à une surface aient leurs développables conservées par la réflexion, il faut et il suffit que ces développables découpent sur la surface réfléchissante un réseau conjugué. — Omphaliques catoptriques de Dupin. — Exemples particuliers. — Cas où les rayons incidents émanent d'un point unique. — Cas où la surface réfléchissante est du second degré.

CHAPITRE XIV.

La surface de J. Liouville et les surfaces dont les plans principaux sont conjugués par rapport à une surface du second degré..... 304

Les surfaces dont les plans principaux sont conjugués par rapport à une surface du second degré. — Théorème de Ribaucour relatif aux développables formées par les normales. — Indication de deux surfaces remarquables satisfaisant à la définition précédente. — Système des surfaces homofocales du second degré. — Surface qui admet pour normales les tangentes communes à deux quadriques homofocales. — Lignes géodésiques de l'ellipsoïde. — Équation en coordonnées elliptiques d'une droite quelconque; théorème de Jacobi relatif à l'intégration des équations abéliennes les plus simples. — Propositions analogues aux théorèmes de Chasles sur les polygones de périmètre maximum ou minimum inscrits ou circonscrits à une ellipse. — Intégration de l'équation aux dérivées partielles des surfaces dont les plans principaux sont conjugués par rapport à une surface du second degré. — L'intégrale générale est de forme transcendante, mais le théorème d'Abel permet de définir un nombre illimité de solutions algébriques. — Extension de la méthode précédente à la détermination d'un système triple orthogonal qui dépend de trois fonctions arbitraires d'une variable.

CHAPITRE XV.

Les congruences de cercles et les systèmes cycliques..... 327

Définition de certaines congruences spéciales dans lesquelles chaque courbe est rencontrée seulement par deux courbes infiniment voi-

sines. — Cas où les courbes de la congruence sont des cercles. — Enveloppes d'une famille de sphères dépendant de deux paramètres. — Lignes *principales* de l'enveloppe. — Elles correspondent à un système conjugué tracé sur la surface des centres des sphères. — Étude détaillée du cas où les lignes de courbure se correspondent sur les deux nappes de l'enveloppe. — Les six coordonnées de la sphère variable satisfont alors à une même équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre. — Les systèmes cycliques de Ribaucour; théorèmes divers. — Différentes manières d'obtenir des systèmes cycliques. — Pour que les lignes asymptotiques se correspondent sur les deux nappes de la surface focale d'une congruence rectiligne, il faut et il suffit que les six coordonnées de chaque droite de la congruence vérifient une même équation linéaire du second ordre.

LIVRE V.

DES LIGNES TRACÉES SUR LES SURFACES.

CHAPITRE I.

Formules générales..... 359

Définition d'un trièdre trirectangle (T) lié à chaque élément de la surface. — Application des formules données dans le Livre I relativement aux déplacements qui dépendent de deux paramètres. — Systèmes de formules (A) et (B). — Directions conjuguées. — Lignes asymptotiques. — Lignes de courbure; équation aux rayons de courbure principaux. — Propriété cinématique des lignes de courbure. — Formules relatives à une courbe quelconque tracée sur la surface. — Théorème de Meusnier. — Courbure normale; courbure géodésique. — Éléments du troisième ordre. — Formules de O. Bonnet et Laguerre. — Sphère osculatrice.

CHAPITRE II.

Les formules de Codazzi..... 373

Formules relatives aux coordonnées obliques, l'élément linéaire étant déterminé par l'équation

$$ds^2 = A^2 du^2 + C^2 dv^2 + 2AC \cos \alpha du dv.$$

Angle de deux courbes. — Condition pour que deux directions soient conjuguées. — Lignes asymptotiques. — Lignes de courbure. — Théorème de Gauss. — Courbure totale et courbure moyenne. — Coordonnées curvilignes rectangulaires; formules de Codazzi. — Étude particulière relative au système coordonné formé par les lignes de courbure. — Application de la méthode générale au système de coordonnées formé par les lignes de longueur nulle. — Détermination des quantités $p, q, r, p_1, q_1, r_1, \xi, \eta, \xi_1, \eta_1$ lorsque l'on connaît les

expressions des coordonnées rectangulaires x, y, z en fonction de deux paramètres u, v . — Application à l'ellipsoïde qu'on suppose rapporté à ses lignes de courbure.

CHAPITRE III.

Courbure normale et torsion géodésique 400

Théorème d'Euler sur la courbure des sections normales. — Formule de Bonnet. — Théorèmes de J. Bertrand. — Introduction de la torsion géodésique. — Expression géométrique des six rotations qui figurent dans les formules données précédemment. — Relations entre les mêmes éléments géométriques dans le cas des coordonnées obliques. — Théorème de Joachimsthal relatif aux lignes de courbure communes à deux surfaces. — Formule de Laguerre. Son application à la détermination du rayon de courbure d'une ligne tracée sur la surface aux points où elle est tangente à une ligne asymptotique. — Théorème de Beltrami. — Torsion d'une ligne asymptotique. — Formule de Bonnet relative au rayon de courbure d'une ligne asymptotique. — Application aux systèmes orthogonaux et isothermes.

CHAPITRE IV.

Les lignes géodésiques 416

Formes diverses de l'équation différentielle des lignes géodésiques. — Les lignes de longueur nulle de la surface satisfont à cette équation différentielle. — Ligne géodésique passant par deux points suffisamment voisins. — Théorème de Gauss relatif aux lignes géodésiques qui passent par un point de la surface. — Plus court chemin entre deux points suffisamment voisins. — Géodésiques normales à une courbe quelconque. — Second théorème de Gauss; extension de la définition des courbes parallèles dans le plan. — Trajectoires orthogonales d'une famille quelconque de géodésiques; elles se déterminent par une simple quadrature. — Variation de longueur d'un segment de ligne géodésique. — Système orthogonal formé de deux familles d'ellipses et d'hyperboles géodésiques. — Théorème de J. Weingarten. — Coordonnées bipolaires dans le plan et sur la sphère. — Théorème de Liouville relatif à deux familles de lignes géodésiques qui se coupent mutuellement sous des angles constants.

CHAPITRE V.

Les familles de courbes parallèles 438

Méthode générale de recherche des lignes géodésiques. — Définition du paramètre différentiel $\Delta\theta$. — Toute fonction dont le paramètre est égal à 1 fait connaître une famille de courbes parallèles. — Lorsque cette fonction contient une constante arbitraire, on peut déterminer les lignes géodésiques de la surface. — Proposition réciproque; lorsque l'on connaît les lignes géodésiques, on peut intégrer, par une simple

quadrature, l'équation $\Delta\theta = 1$. — Théorème de Jacobi : Lorsqu'on a obtenu une intégrale première de l'équation différentielle du second ordre des lignes géodésiques, on peut toujours déterminer un facteur de cette intégrale. — Conséquences diverses. — Expression de l'élément linéaire de la surface au moyen de la fonction θ et de ses dérivées par rapport à la constante arbitraire α . — Équation du troisième ordre à laquelle satisfait la fonction θ . — Indication d'une autre méthode permettant d'établir les résultats précédents. — Distance géodésique de deux points. — Propositions relatives à cette distance.

CHAPITRE VI.

Analogie entre la dynamique des mouvements dans le plan et la théorie des lignes géodésiques 452

Équations du mouvement dans le plan. — Définition d'une famille de trajectoires. — Équation aux dérivées partielles de Jacobi. — Usage qu'on peut faire d'une solution particulière, d'une solution complète. — Théorèmes fondamentaux de Jacobi. — Détermination des solutions de l'équation aux dérivées partielles par différentes conditions initiales. — Des systèmes orthogonaux formés avec une famille de trajectoires. — Application au mouvement des corps pesants. — Théorème de MM. Thomson et Tait. — Principe de la moindre action pour le cas des mouvements plans. — Principe d'Hamilton. — Correspondance établie entre le plan et une surface de telle manière que les trajectoires du mobile dans le plan correspondent à des lignes géodésiques de la surface. — La solution de tout problème de Mécanique fait connaître une infinité de systèmes orthogonaux dans le plan. — Brachistochrones. — Quelques résultats généraux relatifs aux cas où l'on associe des trajectoires qui ne correspondent pas à une même valeur de la constante des forces vives. — Généralisation de ces résultats et application à la théorie des surfaces minima.

CHAPITRE VII.

Application des méthodes précédentes à l'étude des mouvements dans l'espace 478

Équations différentielles du mouvement. — Congruences formées avec les trajectoires du mobile. — Parmi elles, il en est pour lesquelles il y a un potentiel des vitesses; par suite, toutes les trajectoires du mobile qui composent la congruence sont normales à toute une famille de surfaces. — Théorème de Thomson et Tait : toutes les trajectoires qui correspondent à une même valeur de la constante des forces vives et sont normales à une surface sont, par cela même, normales à une famille de surfaces. — Équation aux dérivées partielles d'Hamilton et de Jacobi. — Usage qu'on peut faire de ses diverses solutions. — Si l'on en connaît une intégrale complète, on peut en déduire sans intégration la solution complète du problème de Mécanique proposé. — Il ne faut pas, dans l'application de ce théorème, se borner à

énumérer les constantes arbitraires qui entrent dans l'intégrale; mais cette intégrale ne doit pas satisfaire à une équation du premier ordre distincte de celle de Jacobi. — Définition de l'*action*. — Ses diverses expressions. — Propriétés de minimum auxquelles elle donne lieu. — Variation de l'action quand on passe d'un segment de trajectoire à tout segment infiniment voisin. — Application des résultats précédents à la généralisation des théorèmes que Malus et Dupin ont donnés pour la réflexion et la réfraction des rayons lumineux. — Extension des méthodes précédentes au cas où la fonction des forces contient le temps.

CHAPITRE VIII.

Le problème général de la Dynamique..... 496

Équations de Lagrange. — Transformation d'Hamilton. — Définition d'une *famille* de solutions. — Équations aux dérivées partielles qui définissent la famille. — Familles orthogonales. — Équation aux dérivées partielles de Jacobi. — Usage que l'on peut faire de ses différentes solutions. — Expression de la force vive due à R. Lipschitz. — Principe de la moindre action. — Formule de J. Liouville. — Définition de l'*action*. — Expression de l'action élémentaire au moyen d'une intégrale complète de l'équation de Jacobi et de ses dérivées par rapport aux constantes. — Autre méthode d'exposition des résultats précédents; élimination du temps à l'aide du principe des forces vives. — Définition des angles par rapport à une forme quadratique, travaux de Beltrami. — Définition et propriétés d'invariance des paramètres différentiels $\Delta\theta$, $\Delta(\theta, \theta_1)$. — Transformations remarquables de la forme quadratique. — Lignes géodésiques de la forme, extension des théorèmes de Gauss. — Application au problème général de la Dynamique.

NOTE I.

Sur différentes propriétés des trajectoires orthogonales d'une congruence de courbes..... 528

NOTE II.

Sur le mouvement des corps pesants et le principe de la moindre action... 544

NOTE III.

Recherche des équations de Laplace qui admettent des solutions particulières liées par une relation quadratique à coefficients constants..... 556