

DOCUMENTS MATHÉMATIQUES 3

SÉMINAIRE DE GÉOMÉTRIE ALGÈBRIQUE
DU BOIS MARIE

1960–61

REVÊTEMENTS ÉTALES ET
GROUPE FONDAMENTAL
(SGA 1)

Un séminaire dirigé par A. Grothendieck

Augmenté de deux exposés de
Mme M. Raynaud

*Édition recomposée et annotée du volume 224 des Lecture Notes in Mathematics
publié en 1971 par Springer-Verlag*

Société Mathématique de France 2003

TABLE DES MATIÈRES

I. Morphismes étales	1
1. Notions de calcul différentiel	1
2. Morphismes quasi-finis	1
3. Morphismes non ramifiés ou nets	2
4. Morphismes étales. Revêtements étales	3
5. La propriété fondamentale des morphismes étales	5
6. Application aux extensions étales des anneaux locaux complets	8
7. Construction locale des morphismes non ramifiés et étales	8
8. Relèvement infinitésimal des schémas étales. Application aux schémas formels	11
9. Propriétés de permanence	13
10. Revêtements étales d'un schéma normal	17
11. Quelques compléments	21
 II. Morphismes lisses : généralités, propriétés différentielles	25
1. Généralités	25
2. Quelques critères de lissité d'un morphisme	27
3. Propriétés de permanence	29
4. Propriétés différentielles des morphismes lisses	30
5. Cas d'un corps de base	43
 III. Morphismes lisses : propriétés de prolongement	49
1. Homomorphismes formellement lisses	49
2. Propriété de relèvement caractéristique des homomorphismes formellement lisses	53
3. Prolongement infinitésimal local des morphismes dans un S -schéma lisse ..	56
4. Prolongement infinitésimal local des S -schémas lisses	58
5. Prolongement infinitésimal global des morphismes	59
6. Prolongement infinitésimal global des S -schémas lisses	64
7. Application à la construction de schémas formels et de schémas ordinaires lisses sur un anneau local complet A	68

IV. Morphismes plats	71
1. Sorites sur les modules plats	72
2. Modules fidèlement plats	74
3. Relations avec la complétion	76
4. Relations avec les modules libres	76
5. Critères locaux de platitude	78
6. Morphismes plats et ensembles ouverts	82
V. Le groupe fondamental : généralités	87
0. Introduction	87
1. Préschéma à groupe fini d'opérateurs, préschéma quotient	87
2. Groupes de décomposition et d'inertie. Cas étale	92
3. Automorphismes et morphismes de revêtements étales	96
4. Conditions axiomatiques d'une théorie de Galois	98
5. Catégories galoisiennes	104
6. Foncteurs exacts d'une catégorie galoisienne dans une autre	110
7. Cas des préschémas	115
8. Cas d'un préschéma de base normale	117
9. Cas des préschémas non connexes : catégories multigaloisiennes	118
VI. Catégories fibrées et descente	119
0. Introduction	119
1. Univers, catégories, équivalence de catégories	120
2. Catégories sur une autre	121
3. Changement de base dans les catégories sur \mathcal{E}	124
4. Catégories-fibres; équivalence de \mathcal{E} -catégories	128
5. Morphismes cartésiens, images inverses, foncteurs cartésiens	130
6. Catégories fibrées et catégories préfibrées. Produits et changement de base dans icelles	132
7. Catégories clivées sur \mathcal{E}	136
8. Catégorie clivée définie par un pseudo-foncteur $\mathcal{E}^\circ \rightarrow \mathbf{Cat}$	139
9. Exemple : catégorie clivée définie par un foncteur $\mathcal{E}^\circ \rightarrow \mathbf{Cat}$; catégories scindées sur \mathcal{E}	142
10. Catégories co-fibrées, catégories bi-fibrées	143
11. Exemples divers	144
12. Foncteurs sur une catégorie clivée	148
13. Bibliographie	151
VII : n'existe pas	
VIII. Descente fidèlement plate	153
1. Descente des Modules quasi-cohérents	153

2. Descente des préschémas affines sur un autre	158
3. Descente de propriétés ensemblistes et de propriétés de finitude de morphismes	158
4. Descente de propriétés topologiques	160
5. Descente de morphismes de préschémas	163
6. Application aux morphismes finis et quasi-finis	168
7. Critères d'effectivité pour une donnée de descente	170
8. Bibliographie	175
IX. Descente des morphismes étales. Application au groupe fondamental	177
1. Rappels sur les morphismes étales	177
2. Morphismes submersifs et universellement submersifs	179
3. Descente de morphismes de préschémas étales	181
4. Descente de préschémas étales : critères d'effectivité	182
5. Traduction en termes du groupe fondamental	187
6. Une suite exacte fondamentale. Descente par morphismes à fibres relativement connexes	195
7. Bibliographie	199
X. Théorie de la spécialisation du groupe fondamental	201
1. La suite exacte d'homotopie pour un morphisme propre et séparable	201
2. Application du théorème d'existence de faisceaux : théorème de semi-continuité pour les groupes fondamentaux des fibres d'un morphisme propre et séparable	206
3. Application du théorème de pureté : théorème de continuité pour les groupes fondamentaux des fibres d'un morphisme propre et lisse	212
4. Bibliographie	217
XI. Exemples et compléments	219
1. Espaces projectifs, variétés unirationnelles	219
2. Variétés abéliennes	221
3. Cônes projetants, exemple de Zariski	223
4. La suite exacte de cohomologie	225
5. Cas particuliers de fibrés principaux	230
6. Application aux revêtements principaux : théories de Kummer et d'Artin-Schreier	233
7. Bibliographie	238
XII. Géométrie algébrique et géométrie analytique	239
1. Espace analytique associé à un schéma	239
2. Comparaison des propriétés d'un schéma et de l'espace analytique associé	242

3. Comparaison des propriétés des morphismes	244
4. Théorèmes de comparaison cohomologique et théorèmes d'existence	247
5. Théorèmes de comparaison des revêtements étales	251
6. Bibliographie	256
XIII. Propreté cohomologique des faisceaux d'ensembles et des faisceaux de groupes non commutatifs	259
0. Rappels sur la théorie des champs	259
1. Propreté cohomologique	260
2. Un cas particulier de propreté cohomologique : diviseurs à croisements normaux relatifs	275
3. Propreté cohomologique et locale acyclicité générique	293
4. Suites exactes d'homotopie	305
5. Appendice I : Variations sur le lemme d'Abhyankar	314
6. Appendice II : théorème de finitude pour les images directes des champs ..	320
7. Bibliographie	322
Index terminologique	323
Index des notations	327