

SCHÉMAS EN GROUPES (SGA 3)

Tome I

(Propriétés générales des schémas en groupes)

**Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1962–64
dirigé par M. Demazure et A. Grothendieck**

SÉMINAIRE DE GÉOMÉTRIE ALGÈBRIQUE
DU BOIS MARIE

1962-64

SCHÉMAS EN GROUPES (SGA 3)

Un séminaire dirigé par M. Demazure et A. Grothendieck

Avec la collaboration de
M. Artin, J.-E. Bertin, P. Gabriel, M. Raynaud, J-P. Serre

Tome I

(Propriétés générales des schémas en groupes)

*Édition recomposée et annotée du volume 151 des Lecture Notes in
Mathematics publié en 1970 par Springer-Verlag*

TABLE DES MATIÈRES

Préface des éditeurs	ix
Editors' preface	xi
Guide de lecture pour le tome 1	xiii
Bibliographie	xix
Préface à la réédition de SGA 3, par MICHEL DEMAZURE	xxi
Avertissement	xxiii
Introduction	xxv
Bibliographie	xxviii
I. Structures algébriques. Cohomologie des groupes, par M. DEMAZURE	1
1. Généralités	1
2. Structures algébriques	12
3. La catégorie des \mathbf{O} -modules, la catégorie des $\mathbf{G-O}$ -modules	18
4. Structures algébriques dans la catégorie des schémas	20
5. Cohomologie des groupes	30
6. Objets et modules \mathbf{G} -équivariants	38
Bibliographie	47
II. Fibrés tangents – Algèbres de Lie, par M. DEMAZURE	49
1. Les foncteurs $\underline{\mathrm{Hom}}_{Z/S}(X, Y)$	49
2. Les schémas $I_S(\mathcal{M})$	52
3. Le fibré tangent, la condition (E)	55
4. Espace tangent à un groupe – Algèbres de Lie	70
5. Calcul de quelques algèbres de Lie	91
6. Remarques diverses	98
Bibliographie	100

III. Extensions infinitésimales , par M. DEMAZURE	101
0. Rappels de SGA 1 III et remarques diverses	102
1. Extensions et cohomologie	123
2. Extensions infinitésimales d'un morphisme de schémas en groupes	131
3. Extensions infinitésimales d'un schéma en groupes	138
4. Extensions infinitésimales de sous-groupes fermés	142
Bibliographie	177
IV. Topologies et faisceaux , par M. DEMAZURE	179
1. Épimorphismes effectifs universels	179
2. Morphismes de descente	184
3. Relations d'équivalence effectives universelles	188
4. Topologies et faisceaux	198
5. Passage au quotient et structures algébriques	232
6. Topologies dans la catégorie des schémas	238
Bibliographie	250
V. Construction de schémas quotients , par P. GABRIEL	253
1. \mathcal{C} -groupoïdes	254
2. Exemples de \mathcal{C} -groupoïdes	257
3. Quelques sorites sur les \mathcal{C} -groupoïdes	259
4. Passage au quotient par un groupoïde fini et plat (démonstration d'un cas particulier)	263
5. Passage au quotient par un groupoïde fini et plat (cas général)	269
6. Passage au quotient lorsqu'il existe une quasi-section	272
7. Quotient par un groupoïde propre et plat	276
8. Passage au quotient par un groupoïde plat non nécessairement propre	281
9. Élimination des hypothèses noethériennes dans le théorème 7.1	283
10. Complément : quotients par un schéma en groupes	286
Bibliographie	292
VI_A. Généralités sur les groupes algébriques , par P. GABRIEL	295
0. Remarques préliminaires	295
1. Propriétés locales d'un A-groupe localement de type fini	298
2. Composantes connexes d'un A-groupe localement de type fini	301
3. Construction de quotients $F \backslash G$ (pour G, F de type fini)	314
4. Construction de quotients $F \backslash G$ (cas général)	320
5. Liens avec l'Exposé IV et conséquences	324
6. Compléments sur les k -groupes non nécessairement de type fini	329
Bibliographie	332
VI_B. Généralités sur les schémas en groupes , par J.-E. BERTIN	335
1. Morphismes de groupes localement de type fini sur un corps	335
2. « Propriétés ouvertes » des groupes et des morphismes de groupes localement de présentation finie	343
3. Composante neutre d'un groupe localement de présentation finie	351

4. Dimension des fibres des groupes localement de présentation finie	356
5. Séparation des groupes et espaces homogènes	359
6. Sous-foncteurs et sous-schémas en groupes	372
7. Sous-groupes engendrés ; groupe des commutateurs	384
8. Schémas en groupes résolubles ou nilpotents	395
9. Faisceaux quotients	399
10. Passage à la limite projective dans les schémas en groupes et les schémas à groupe d'opérateurs	403
11. Schémas en groupes affines	410
12. Compléments sur G_{af} et les groupes « anti-affines »	434
13. Groupes affines plats sur une base régulière de dimension ≤ 2	440
Bibliographie	445
VII_A. Étude infinitésimale des schémas en groupes, par P. GABRIEL ..	447
1. Opérateurs différentiels	447
2. Opérateurs différentiels invariants sur les schémas en groupes	455
3. Coalgèbres et dualité de Cartier	461
4. « Frobeniuseries »	468
5. p -algèbres de Lie	477
6. p -algèbre de Lie d'un S-schéma en groupes	486
7. Groupes radiciels de hauteur 1	491
8. Cas d'un corps de base	498
Bibliographie	506
VII_B. Étude infinitésimale des schémas en groupes, par P. GABRIEL ..	507
0. Rappels sur les anneaux et modules pseudocompacts	507
1. Variétés formelles sur un anneau pseudocompact	523
2. Généralités sur les groupes formels	549
3. Phénomènes particuliers à la caractéristique 0	573
4. Phénomènes particuliers à la caractéristique $p > 0$	580
5. Espaces homogènes de groupes formels infinitésimaux sur un corps	587
Bibliographie	604
Index	607