

# INHALT

## I. DIFFERENTIALRECHNUNG IN BANACHRÄUMEN

|  |    |
|--|----|
| 1. <i>Wiederholung von Begriffen über Banachräume und stetige lineare Abbildungen</i> . . . . .    | 11 |
| 1.1. Normierte Vektorräume . . . . .   | 11 |
| 1.2. Beispiele von Banachräumen . . . . .  | 13 |
| 1.3. Normal konvergente Reihen in Banachräumen . . .   | 16 |
| 1.4. Stetige lineare Abbildungen . . . . .   | 17 |
| 1.5. Zusammensetzung stetiger linearer Abbildungen .   | 20 |
| 1.6. Isomorphismen normierter Vektorräume; äquivalente Normen auf einem normierten Vektorraum .    | 21 |
| 1.7. Beispiele von Räumen $\mathcal{L}(E; F)$ . . . . .  | 24 |
| 1.8. Stetige multilineare Abbildungen . . . . .  | 30 |
| 1.9. Die natürliche Isometrie $\mathcal{L}(E, F; G) \approx \mathcal{L}(E; \mathcal{L}(F; G))$     | 33 |
| 2. <i>Differenzierbare Abbildungen</i> . . . . .   | 34 |
| 2.1. Definition einer differenzierbaren Abbildung . . .  | 34 |
| 2.2. Die Ableitung einer zusammengesetzten Funktion  | 39 |
| 2.3. Linearität der Ableitung . . . . .  | 40 |
| 2.4. Ableitungen spezieller Funktionen . . . . .   |    |
| 2.5. Funktionen mit Werten in einem Produkt von Banachräumen . . . . .                             | 46 |
| 2.6. Der Fall einer offenen Menge $U$ in einem Produkt von Banachräumen . . . . .                  | 49 |
| 2.7. Kombination der in 2.5 und 2.6 behandelten Fälle  | 51 |
| 2.8. Schlußbemerkung: Vergleich zwischen R-Differenzierbarkeit und C-Differenzierbarkeit . . . . . | 52 |

|  |     |
|--|-----|
| 3. Satz vom endlichen Zuwachs; Anwendungen . . . . .   | 54  |
| 3.1. Wortlaut des Hauptsatzes . . . . .  | 54  |
| 3.2. Spezialfälle des Hauptsatzes . . . . .  | 57  |
| 3.3. Satz vom endlichen Zuwachs, wenn die Variable<br>in einem Banachraum läuft . . . . .  | 58  |
| 3.4. Nochmals der Satz vom endlichen Zuwachs . . . . .   | 63  |
| 3.5. Eine Liste von Übungsaufgaben . . . . .   | 64  |
| 3.6. Erste Anwendung des Satzes vom endlichen<br>Zuwachs: Konvergenz einer Folge differenzierbarer<br>Funktionen . . . . .                             | 65  |
| 3.7. Zweite Anwendung des Satzes vom endlichen<br>Zuwachs: eine Beziehung zwischen partieller<br>Differenzierbarkeit und Differenzierbarkeit . . . . . | 68  |
| 3.8. Dritte Anwendung des Satzes vom endlichen<br>Zuwachs: Begriff einer strikt differenzierbaren<br>Funktion . . . . .                                | 70  |
| 4. Lokale Umkehrbarkeit einer Abbildung von der Klasse $C^1$ .<br>Satz von den impliziten Funktionen . . . . .   | 72  |
| 4.1. Diffeomorphismen der Klasse $C^1$ . . . . .   | 72  |
| 4.2. Der Satz von der lokalen Umkehrbarkeit . . . . .  | 75  |
| 4.3. Beweis des Satzes von der lokalen Umkehrbarkeit:<br>erste Reduktion . . . . .   | 76  |
| 4.4. Beweis von Proposition 4.3.1 . . . . .  | 77  |
| 4.5. Beweis von Satz 4.4.1 . . . . .   | 78  |
| 4.6. Satz von der lokalen Umkehrbarkeit im endlich-<br>dimensionalen Fall . . . . .  | 80  |
| 4.7. Satz von den impliziten Funktionen . . . . .  | 81  |
| 5. Ableitungen höherer Ordnung . . . . .   | 85  |
| 5.1. Die zweite 'Ableitung . . . . .   | 85  |
| 5.2. Der Fall eines Produktes $E = E_1 \times \dots \times E_n$ . . . . .  | 89  |
| 5.3. Höhere Ableitungen . . . . .  | 92  |
| 5.4. Beispiele $n$ -mal differenzierbarer Funktionen . . . . .   | 95  |
| 5.5. Taylorsche Formel: ein Spezialfall . . . . .  | 99  |
| 5.6. Taylorsche Formel: der allgemeine Fall . . . . .  | 101 |

|   |     |
|---|-----|
| 6. <i>Polynome</i> . . . . .  | 105 |
| 6.1. Homogene Polynome vom Grade $n$ . . . . .                                      | 105 |
| 6.2. Nicht notwendig homogene Polynome . . . . .                                    | 108 |
| 6.3. Die höheren „Differenzen“ eines Polynoms . . . . .                             | 111 |
| 6.4. Der Fall normierter Vektorräume $E$ und $F$ . . . . .                          | 115 |
| 7. <i>Endliche Entwicklungen</i> . . . . .  | 117 |
| 7.1. Definitionen . . . . .   | 117 |
| 7.2. Der Fall einer im Punkte $a$ $n$ -mal differenzierbaren Funktion $f$ . . . . . | 121 |
| 7.3. Operationen mit endlichen Entwicklungen . . . . .                              | 122 |
| 7.4. Komposition von zwei endlichen Entwicklungen . . . . .                         | 123 |
| 7.5. Berechnung der höheren Ableitungen einer zusammengesetzten Funktion . . . . .  | 126 |
| 8. <i>Relative Maxima und Minima</i> . . . . .                                      | 127 |
| 8.1. Erste notwendige Bedingung für ein relatives Minimum . . . . .                 | 127 |
| 8.2. Bedingungen zweiter Ordnung für ein relatives Minimum . . . . .                | 129 |
| 8.3. Eine hinreichende Bedingung für ein starkes relatives Minimum . . . . .        | 131 |
| ÜBUNGSAUFGABEN . . . . .  | 135 |

## II. DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

|  |     |
|--|-----|
| 1. <i>Definitionen und fundamentale Sätze</i> . . . . .              | 145 |
| 1.1. Differentialgleichungen erster Ordnung . . . . .                | 145 |
| 1.2. Differentialgleichungen $n$ -ter Ordnung . . . . .              | 147 |
| 1.3. Näherungslösungen . . . . .                                     | 148 |
| 1.4. Beispiel: lineare Differentialgleichungen . . . . .             | 153 |
| 1.5. Der Fall mit Lipschitzbedingung: das Fundamentallemma . . . . . | 155 |

|       |   |     |
|-------|---|-----|
| 1.6.  | Anwendung des Fundamentallemmas: Eindeutigkeitsatz . . . . .  | 159 |
| 1.7.  | Existenzsatz, wenn eine Lipschitzbedingung erfüllt ist . . . . .  | 159 |
| 1.8.  | Der Fall einer Funktion $f$ mit lokaler Lipschitzbedingung . . . . .  | 161 |
| 1.9.  | Der Fall einer linearen Differentialgleichung . . .   | 164 |
| 1.10. | Abhängigkeit vom Anfangswert . . . . .  | 165 |
| 1.11. | Der Fall einer von einem Parameter abhängigen Differentialgleichung . . . . .                                   | 168 |
| 2.    | <i>Lineare Differentialgleichungen</i> . . . . .  | 170 |
| 2.1.  | Die Gestalt der allgemeinen Lösung . . . . .  | 170 |
| 2.2.  | Studium der homogenen linearen Differentialgleichung . . . . .  | 170 |
| 2.3.  | Der Fall eines endlich-dimensionalen Raumes $E$ .   | 173 |
| 2.4.  | Die inhomogene lineare Differentialgleichung . . .  | 176 |
| 2.5.  | Fall einer linearen homogenen Differentialgleichung $n$ -ter Ordnung . . . . .                                  | 177 |
| 2.6.  | Inhomogene lineare Differentialgleichung $n$ -ter Ordnung . . . . .   | 181 |
| 2.7.  | Lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten . . . . .  | 183 |
| 2.8.  | Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten: der Fall eines endlich-dimensionalen Raumes $E$ . . . . . | 185 |
| 2.9.  | Lineare Differentialgleichung $n$ -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten . . . . .                           | 188 |
| 3.    | <i>Verschiedene Fragestellungen</i> . . . . .   | 190 |
| 3.1.  | Einparametrische Transformationsgruppen . . . . .   | 190 |
| 3.2.  | Keime einparametrischer Gruppen . . . . .   | 192 |
| 3.3.  | Differenzierbarkeitsfragen . . . . .  | 194 |
| 3.4.  | Differenzierbarkeitsfragen (Fortsetzung): Differenzierbarkeit nach dem Anfangswert $u$ . . . . .                | 195 |
| 3.5.  | Beweis von Satz 3.4.2 . . . . .   | 199 |

|  |     |
|--|-----|
| 3.6. Differenzierbarkeit nach einem Parameter, von dem die Differentialgleichung abhängt . . . . . | 201 |
| 3.7. Differenzierbarkeit höherer Ordnung . . . . .   | 203 |
| 3.8. Der Fall einer Differentialgleichung zweiter Ordnung . . . . .                                | 204 |
| 3.9. Differentialgleichungen, die nicht die Variable enthalten . . . . .                           | 206 |
| 3.10. „Implizite“ Differentialgleichungen . . . . .  | 210 |
| 4. <i>Erste Integrale und lineare partielle Differentialgleichungen</i> . . . . .                  | 215 |
| 4.1. Definition des ersten Integrales eines Differentialgleichungssystems . . . . .                | 215 |
| 4.2. Existenz von Vorintegralen . . . . .  | 218 |
| 4.3. Inhomogene, lineare partielle Differentialgleichungen . . . . .                               | 220 |
| 4.4. Beispiele . . . . .   | 222 |
| ÜBUNGSAUFGABEN . . . . .   | 224 |
| INDEX . . . . .  | 233 |