

Inhalt

I. Elemente der Topologie und der Funktionalanalysis

§ 1.	Lineare Räume	19
1.	Definition des linearen Raumes	19
2.	Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit von Vektoren	20
3.	Teilräume	22
4.	Der Quotientenraum	23
5.	Lineare Operatoren	24
6.	Das Rechnen mit Operatoren	26
7.	Invariante Teilräume	30
8.	Konvexe Mengen	30
9.	Sätze über die Fortsetzung eines linearen Funktional :	34
§ 2.	Topologische Räume	40
1.	Definition des topologischen Raumes	40
2.	Das Innere einer Menge. Umgebungen	40
3.	Abgeschlossene Mengen. Abgeschlossene Hülle einer Menge	41
4.	Teilräume	43
5.	Abbildungen topologischer Räume	43
6.	Bikompakte Mengen	44
7.	Hausdorffsche Räume	45
8.	Normale Räume	47
9.	Lokal bikompakte Räume	49
10.	Der Satz von Stone	50
11.	Die durch eine Funktionenfamilie definierte schwache Topologie	53
12.	Topologisches Produkt von Räumen	53
13.	Metrische Räume	56
14.	Kompakte Mengen in metrischen Räumen	60
15.	Topologisches Produkt von metrischen Räumen	62
§ 3.	Topologische lineare Räume	65
1.	Definition des topologischen linearen Raumes	65
2.	Abgeschlossene Teilräume in topologischen linearen Räumen	66
3.	Konvexe Mengen in lokal konvexen Räumen	67
4.	Definition einer lokal konvexen Topologie mit Hilfe von Halbnormen	68

5.	Endlichdimensionale Räume	71
6.	Stetige lineare Funktionale	73
7.	Der konjugierte Raum	75
8.	Konvexe Mengen in einem endlichdimensionalen Raum	79
9.	Konvexe Mengen im konjugierten Raum	79
10.	Kegel	84
11.	Orthogonalräume im konjugierten Raum	85
12.	Analytische Vektorfunktionen	87
13.	Vollständige lokal konvexe Räume	88
§ 4.	Normierte Räume	88
1.	Definition des normierten Raumes	88
2.	Reihen in normierten Räumen	93
3.	Quotientenräume eines vollständigen normierten Raumes	94
4.	Beschränkte lineare Operatoren	95
5.	Beschränkte lineare Funktionale. Der konjugierte Raum	99
6.	Vollstetige Operatoren	100
7.	Analytische Vektorfunktionen mit Werten in einem vollständigen normierten Raum	102
§ 5.	Hilbertsche Räume	104
1.	Definition des Hilbertschen Raumes	104
2.	Projektion eines Vektors auf einen Teilraum	107
3.	Beschränkte lineare Funktionale über einem Hilbertschen Raum	109
4.	Orthogonalsysteme von Vektoren in einem Hilbertschen Raum	111
5.	Orthogonale Summe von Teilräumen	116
6.	Die direkte Summe von Hilbertschen Räumen	118
7.	Der Graph eines Operators	119
8.	Abgeschlossene Operatoren. Abschließung eines Operators.	119
9.	Der adjungierte Operator	121
10.	Beschränkte Operatoren	125
11.	Verallgemeinerung auf Operatoren in einem Banachschen Raum	128
12.	Projektionsoperatoren	128
13.	Reduzierbarkeit	133
14.	Partiell isometrische Operatoren	133
15.	Matrixdarstellung eines Operators	134
§ 6.	Integration auf einem lokal bikompakten Raum	136
1.	Grundbegriffe. Problemstellung	136
2.	Grundeigenschaften des Integrals.	137
3.	Fortsetzung des Integrals auf von unten halbstetige Funktionen.	138
4.	Oberes Integral einer beliebigen nichtnegativen reellen Funktion	141
5.	Äußeres Maß einer Menge	143
6.	Äquivalente Funktionen	144
7.	Die Räume $\mathcal{L}^1$ und L^1	146
8.	Summierbare Mengen	150
9.	Meßbare Mengen	153
10.	Meßbare Funktionen	155
11.	Der reelle Raum L^2	161
12.	Der komplexe Raum L^2	163
13.	Der Raum L^x	163

14.	Positiver und negativer Teil eines linearen Funktional	164
15.	Der Satz von Radon-Nikodym	165
16.	Der zu L^1 konjugierte Raum	167
17.	Komplexe Maße	170
18.	Integrale auf Produkträumen	171
19.	Integration von Vektor- und Operatorfunktionen	176

II. Grundbegriffe und Sätze aus der Theorie der normierten Algebren

§ 7.	Algebraische Grundbegriffe	178
1.	Definition der Algebra	178
2.	Algebren mit Einselement	179
3.	Das Zentrum einer Algebra	182
4.	Ideale	182
5.	Das Radikal	187
6.	Homomorphismen und Isomorphismen von Algebren	190
7.	Reguläre Darstellung einer Algebra	192
§ 8.	Topologische Algebren	193
1.	Definition der topologischen Algebra	193
2.	Topologische Adjunktion des Einselements	195
3.	Algebren mit stetigen Inversen	195
4.	Die Resolvente in einer Algebra mit stetigen Inversen	197
5.	Topologische Divisionsalgebren mit stetigen Inversen	199
6.	Algebren mit stetigen Quasiinversen	200
§ 9.	Normierte Algebren	200
1.	Definition der normierten Algebra	200
2.	Adjunktion des Einselements	202
3.	Das Radikal einer normierten Algebra	202
4.	Banachsche Algebren mit Einselement	203
5.	Die Resolvente in einer Banachschen Algebra mit Einselement	205
6.	Stetige Homomorphismen normierter Algebren	206
7.	Reguläre Darstellungen einer normierten Algebra	207
§ 10.	Symmetrische Algebren	210
1.	Definition und Eigenschaften der symmetrischen Algebren	210
2.	Positive Funktionale	212
3.	Normierte symmetrische Algebren	214
4.	Positive Funktionale auf einer Banachschen symmetrischen Algebra	215

III. Kommutative normierte Algebren

§ 11.	Realisierung einer kommutativen Algebra als Funktionenalgebra	218
1.	Die Quotientenalgebra nach einem maximalen Ideal	218
2.	Funktionen von maximalen Idealen, die durch Elemente der Algebra erzeugt werden	219

3.	Topologisierung der Menge aller maximalen Ideale	222
4.	Algebren ohne Einselement	225
5.	Erzeugendensysteme einer Algebra	226
6.	Analytische Funktionen von Elementen einer Algebra	227
7.	Wienersche Paare von Algebren	231
8.	Funktionen von mehreren Elementen einer Algebra	233
9.	Zerlegung einer Algebra in die direkte Summe von Idealen	234
10.	Algebren mit Radikal.	235
§ 12.	Homomorphismen und Isomorphismen von kommutativen Algebren .	236
1.	Die Eindeutigkeit der Norm in einer halbeinfachen Algebra	236
2.	Symmetrische Algebren	238
§ 13.	Der Schilowsche Rand	239
1.	Definition und Eigenschaften des Schilowschen Randes	239
2.	Erweiterung maximaler Ideale	240
§ 14.	Vollsymmetrische kommutative Algebren	243
1.	Definition der vollsymmetrischen Algebra	243
2.	Ein Kriterium für die Vollsymmetrie	244
3.	Eine Anwendung des Satzes von Stone	245
4.	Der Schilowsche Rand einer vollsymmetrischen Algebra	246
§ 15.	Reguläre Algebren	247
1.	Definition der regulären Algebra	247
2.	Normale Funktionenalgebren	247
3.	Der Strukturraum einer Algebra	249
4.	Eigenschaften regulärer Algebren.	251
5.	Algebren ohne Einselement	255
6.	Eine hinreichende Bedingung für die Regularität einer Algebra	255
7.	Primäre Ideale.	256
§ 16.	Vollreguläre kommutative Algebren	256
1.	Definition und Eigenschaften der vollregulären Algebren	256
2.	Realisierungen vollregulärer kommutativer Algebren	259
3.	Verallgemeinerung auf pseudonormierte Algebren	265
4.	Symmetrische Teilalgebren der Algebra $C(T)$ und bikompakte Erweiterungen des Raumes T	266
5.	Antisymmetrische Teilalgebren der Algebra $C(T)$	267
6.	Teilalgebren der Algebra $C(T)$ und einige Fragen der Approximationstheorie	268
IV.	Darstellungen symmetrischer Algebren	
§ 17.	Grundlegende Begriffe und Sätze der Darstellungstheorie	271
1.	Definition der Darstellung. Einfache Eigenschaften	271
2.	Direkte Summe von Darstellungen	272
3.	Beschreibung einer Darstellung mit Hilfe positiver Funktionale	273

4.	Darstellung vollregulärer kommutativer Algebren. Spektralsatz	277
5.	Spektraloperatoren	285
6.	Irreduzible Darstellungen	287
7.	Zusammenhang zwischen Vektoren und positiven Funktionalen	288
§ 18.	Einbettung einer symmetrischen Algebra in eine Operatorenalgebra . .	289
1.	Reguläre Norm	289
2.	Reduzierte Algebren	290
3.	Minimale reguläre Norm	293
§ 19.	Unzerlegbare Funktionale und irreduzible Darstellungen	296
1.	Positive Funktionale, die einem gegebenen Funktional untergeordnet sind	296
2.	Die Algebra C_f	298
3.	Unzerlegbare positive Funktionale	299
4.	Vollständigkeits- und Approximationssätze	300
§ 20.	Anwendungen auf kommutative symmetrische Algebren	303
1.	Die minimale reguläre Norm in einer kommutativen symmetrischen Algebra	303
2.	Positive Funktionale über einer kommutativen symmetrischen Algebra	305
3.	Beispiele	307
4.	Vollsymmetrische Algebren	311
§ 21.	Das verallgemeinerte Schursche Lemma	318
1.	Kanonische Zerlegung eines Operators	318
2.	Hauptsatz	320
3.	Anwendung auf die direkte Summe paarweise nicht äquivalenter Darstellungen	321
4.	Anwendung auf Darstellungen, die Vielfaches einer gegebenen irreduziblen Darstellung sind.	322
§ 22.	Einige Darstellungen der Algebra $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$	325
1.	Die Ideale der Algebra $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$	325
2.	Die Algebra I_0 und ihre Darstellungen	328
3.	Darstellungen der Algebra $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$	330
 V. Spezielle Algebren		
§ 23.	Vollsymmetrische Algebren	332
1.	Definition. Beispiele für vollsymmetrische Algebren	332
2.	Spektrum	333
3.	Fortsetzungssätze	335
4.	Kriterium für die Vollsymmetrie	342
§ 24.	Vollreguläre Algebren	343
1.	Eigenschaften vollregulärer Algebren	343
2.	Realisierung einer vollregulären Algebra als Operatorenalgebra	346
3.	Die Quotientenalgebra einer vollregulären Algebra	348

§ 25.	Duale Algebren	350
1.	Annulatoralgebren und duale Algebren	350
2.	Ideale einer Annulatoralgebra	352
3.	Halbeinfache Annulatoralgebren	355
4.	Einfache Annulatoralgebren	361
5.	Hilbertsche Algebren	364
6.	Vollreguläre duale Algebren	367
§ 26.	Algebren von Vektorfunktionen	369
1.	Definition einer Algebra von Vektorfunktionen	369
2.	Ideale einer Algebra von Vektorfunktionen	370
3.	Die Zugehörigkeit einer Vektorfunktion zu einer Algebra	373
4.	Vollreguläre Algebren	374
5.	Das kontinuierliche Analogon zum Schurschen Lemma	381
6.	Der Strukturraum einer vollregulären Algebra	389
VI.	Gruppenalgebren	
§ 27.	Topologische Gruppen	391
1.	Definition einer Gruppe	391
2.	Untergruppen	392
3.	Definition und Eigenschaften einer topologischen Gruppe	393
4.	Invariantes Integral und invariantes Maß auf einer lokal bikompakten Gruppe	394
5.	Die Existenz des invarianten Integrals auf einer lokal bikompakten Gruppe	395
§ 28.	Definition und Eigenschaften der Gruppenalgebren	403
1.	Definition der Gruppenalgebra	403
2.	Eigenschaften der Gruppenalgebra	406
§ 29.	Unitäre Darstellungen einer lokal bikompakten Gruppe. Ihr Zusammenhang mit den Darstellungen der Gruppenalgebra	409
1.	Unitäre Darstellungen einer Gruppe	409
2.	Der Zusammenhang zwischen den Darstellungen der Gruppe und der Gruppenalgebra	410
3.	Der Vollständigkeitssatz	414
4.	Beispiele	414
§ 30.	Positiv definite Funktionen	425
1.	Positiv definite Funktionen und ihr Zusammenhang mit den unitären Darstellungen	425
2.	Der Zusammenhang der positiv definiten Funktionen mit den positiven Funktionalen einer Gruppenalgebra	427
3.	Reguläre Mengen	431
4.	Trigonometrische Polynome auf einer Gruppe	433
5.	Das Spektrum	434
§ 31.	Harmonische Analysis auf einer kommutativen lokal bikompakten Gruppe	437
1.	Die maximalen Ideale der Gruppenalgebra einer kommutativen Gruppe. Charaktere	437
2.	Die Gruppe der Charaktere	441

3.	Positiv definite Funktionen auf einer kommutativen Gruppe	443
4.	Die Umkehrformel und der Plancherelsche Satz für eine kommutative Gruppe . . .	444
5.	Trennbarkeitseigenschaft der Menge $[L^1 \cap P]$	449
6.	Dualitätssatz	450
7.	Unitäre Darstellungen einer kommutativen Gruppe	451
8.	Sätze vom Tauberschen Typ	452
9.	Bikompakte Gruppen	456
10.	Kugelfunktionen	458
11.	Die verallgemeinerte Verschiebung	460
§ 32.	Darstellung bikompakter Gruppen	462
1.	Die Algebra $L^2(\mathbb{G})$	462
2.	Darstellung einer bikompakten Gruppe	464
3.	Das Tensorprodukt von Darstellungen	469
4.	Der Dualitätssatz für bikompakte Gruppen	469
 VII. Algebren von Operatoren eines Hilbertschen Raumes		
§ 33.	Verschiedene Topologien der Algebra $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$	473
1.	Schwache Topologie	473
2.	Starke Topologie	473
3.	Ultrastarke Topologie	475
4.	Gleichmäßige Topologie	476
§ 34.	Schwach abgeschlossene Teilalgebren der Algebra $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$	476
1.	Grundbegriffe	476
2.	Die Haupteinheit	477
3.	Das Zentrum	481
4.	Faktorisierung	482
§ 35.	Relative Äquivalenz	482
1.	Operatoren und Teilräume, die zu einer Algebra gehören	482
2.	Fundamentalfhssatz	483
3.	Definition der relativen Äquivalenz	484
4.	Vergleich abgeschlossener Teilräume	485
5.	Endliche und unendliche Teilräume	487
§ 36.	Relative Dimension	491
1.	Der ganze Teil des Quotienten zweier Teilräume	491
2.	Existenz eines minimalen Teilraumes	493
3.	Das Fehlen eines minimalen Teilraumes	493
4.	Existenz und Eigenschaften der relativen Dimension	495
5.	Der Wertebereich der relativen Dimension. Klassifikation der Faktoren	500
6.	Die Invarianz der Faktorklasse gegenüber einem symmetrischen Isomorphismus . . .	502

§ 37.	Relative Spur	503
1.	Definition der Spur	503
2.	Eigenschaften der Spur	504
3.	Die Spur in den Faktoren der Klassen (I_∞) und (II_∞)	509
§ 38.	Struktur und Beispiele von Faktorklassen	509
1.	Die Abbildung $M \rightarrow M_{(\infty)}$	509
2.	Die Beschreibung der Faktoren der Klassen (I) und (II) durch Matrizen	512
3.	Die Beschreibung der Faktoren der Klasse (I)	514
4.	Die Struktur der Faktoren der Klasse (II_∞)	516
5.	Ein Beispiel für einen Faktor aus der Klasse (II_1)	516
6.	Approximativ endliche Faktoren der Klasse (II_1)	519
7.	Der Zusammenhang zwischen den Klassen der Faktoren M und M'	519
8.	Der Zusammenhang zwischen symmetrischen Isomorphismen und Raumisomorphismen	519
9.	Unbeschränkte Operatoren, die zu einem Faktor endlicher Klasse gehören	520
§ 39.	Unitäre Algebren und Algebren mit Spur	520
1.	Definition der unitären Algebra	520
2.	Definition einer Algebra mit Spur	520
3.	Konstruktion einer unitären Algebra mit Hilfe der Spur	520
4.	Die kanonische Spur in einer unitären Algebra	521
VIII.	Die Zerlegung einer Operatorenalgebra in irreduzible Algebren	
§ 40.	Problemstellung. Die kanonische Form einer kommutativen Algebra von Operatoren im Hilbertschen Raum	525
1.	Problemstellung	525
2.	Hilfssatz über Separabilität	526
3.	Die kanonische Form einer kommutativen Algebra	528
§ 41.	Das direkte Integral Hilbertscher Räume. Zerlegung einer Algebra von Operatoren in ein direktes Integral irreduzibler Algebren	531
1.	Das direkte Integral Hilbertscher Räume	531
2.	Die Zerlegung eines Hilbertschen Raumes in das direkte Integral bezüglich einer gegebenen kommutativen Algebra R	533
3.	Zerlegung bezüglich einer maximalen kommutativen Algebra. Irreduzibilitätsbedingung	538
4.	Zerlegung einer unitären Darstellung einer lokal bikompakten Gruppe in irreduzible Darstellungen	542
5.	Zentrale Zerlegungen und Faktordarstellungen	546
6.	Darstellungen in einem Raum mit indefiniter Metrik	546

Anhang

I.	Halbgeordnete Mengen. Zornsches Lemma	548
II.	Borelsche Räume und Borelsche Funktionen	549
III.	Analytische Mengen	550
	Literatur	558
	Namenregister	605
	Sachregister	611