

## INHALTSVERZEICHNIS

1.	<b>Affine Geometrie der Ebene</b> .....	1
1.1.	Verschiebungen .....	1
1.1.1.	Begriff .....	1
1.1.2.	Repräsentanten von Verschiebungen .....	2
1.1.3.	Addition von Verschiebungen .....	3
1.1.4.	Subtraktion von Verschiebungen .....	4
1.1.5.	Entgegengesetzte Verschiebung .....	5
1.1.6.	Ortsverschiebung .....	5
1.2.	Streckungen .....	6
1.2.1.	Begriff .....	6
1.2.2.	Rechengesetze für Streckungen .....	8
1.2.3.	Vektoren .....	12
1.2.4.	Linearkombinationen. Lineare Abhängigkeit .....	13
1.2.5.	Basis des Vektorraumes der Ebene .....	14
1.2.6.	Koordinatensysteme .....	16
1.3.	Geraden .....	17
1.3.1.	Geradengleichungen .....	17
1.3.2.	Zweipunktgleichung .....	19
1.3.3.	Lagerelationen, Schnittpunkte von Geraden .....	20
1.3.4.	Geradenbüschel .....	24
1.3.5.	Kollineare Punkte .....	26
1.4.	Teilverhältnisse .....	26
1.4.1.	Begriff .....	26
1.4.2.	Satz von CEVA .....	31
1.4.3.	Doppelverhältnis .....	35
1.4.4.	Satz von MENELAOS .....	37
1.4.5.	Satz von DESARGUES .....	39
1.5.	Koordinatentransformationen und affine Abbildungen .....	41
1.5.1.	Koordinatentransformationen .....	41
1.5.2.	Affine Abbildungen .....	43
2.	<b>Metrische Geometrie der Ebene</b> .....	47
2.1.	Drehungen .....	47
2.1.1.	Drehsinn .....	47
2.1.2.	Drehwinkel .....	47
2.1.3.	Winkelfunktionen .....	48
2.1.4.	Kartesische Koordinaten und Polarkoordinaten .....	50
2.1.5.	Winkel zwischen Vektoren bzw. Geraden .....	52
2.1.6.	Drehung des Koordinatensystems .....	53

2.2.	Das Skalarprodukt	50
2.2.1.	Begriff	50
2.2.2.	Das Skalarprodukt in der Koordinatendarstellung	57
2.2.3.	Rechenregeln für das Skalarprodukt	58
2.2.4.	Zerlegung in Parallel- und Normalkomponente	59
2.3.	Das Flächenprodukt	61
2.3.1.	Begriff	61
2.3.2.	Das Flächenprodukt in der Koordinatendarstellung	62
2.3.3.	Rechenregeln für das Flächenprodukt	62
2.3.4.	Zerlegung in Parallel- und Normalkomponente	63
2.3.5.	Zerlegung in Komponenten	64
2.3.6.	Gegenüberstellung der Eigenschaften von Skalar- und Flächenprodukt	65
2.4.	Geraden	66
2.4.1.	Stellungsvektor	66
2.4.2.	Orientierung durch den Stellungsvektor	66
2.4.3.	Hessesche Normalform	67
2.4.4.	Abstand eines Punktes von einer Geraden	67
2.4.5.	Spiegelung an einer Geraden	69
2.5.	Anwendung auf die Dreieckslehre	70
2.5.1.	Kosinussatz	70
2.5.2.	Sinussatz	71
2.5.3.	Höhenschnittpunkt	71
2.5.4.	Umkreiszentrum	72
2.5.5.	Eulersche Gerade	73
2.5.6.	Winkelhalbierende	73
2.6.	Kreislehre	74
2.6.1.	Kreisgleichung	74
2.6.2.	Kreis und Gerade	75
2.6.3.	Potenz	77
2.6.4.	Potenzlinie	78
2.6.5.	Polare	78
2.7.	Elemente der Kegelschnittslehre	80
2.7.1.	Ellipse	80
2.7.2.	Hyperbel	84
2.7.3.	Brennpunkteigenschaften von Ellipse und Hyperbel	86
2.7.4.	Parabel	89
3.	<b>Lineare Algebra</b>	90
3.1.	Das Gaußsche Eliminationsverfahren zur Auflösung linearer Gleichungssysteme	90
3.1.1.	Lineare Gleichungssysteme	90
3.1.2.	Äquivalente Gleichungssysteme	93
3.1.3.	Transformation auf Trapezform	95
3.1.4.	Die Lösungsmannigfaltigkeit	100
3.1.5.	Homogene Gleichungssysteme	104
3.2.	Vektorräume	106
3.2.1.	Die Moduleigenschaften von Vektorräumen	106
3.2.2.	Die Eigenschaften der Operatoranwendung in Vektorräumen	109
3.2.3.	Vektorschreibweise für lineare Gleichungssysteme	110

3.2.4.	Lineare Abhängigkeit .....	113
3.2.5.	Rang, Dimension, Basis .....	118
3.2.6.	Unterräume .....	122
3.2.7.	Inneres Produkt .....	124
3.2.8.	Der Rang des Lösungsraumes eines homogenen linearen Gleichungssystems	126
3.3.	Matrizen .....	128
3.3.1.	Grundbegriffe .....	128
3.3.2.	Rang einer Matrix .....	130
3.3.3.	Vektorraum der Matrizen gleichen Typs .....	134
3.3.4.	Multiplikation von Matrizen .....	136
3.3.5.	Matrizen als lineare Abbildungen .....	141
3.3.6.	Hauptsätze über lineare Gleichungssysteme .....	142
3.3.7.	Inverse einer regulären Matrix .....	146
3.3.8.	Darstellung elementarer Umformungen durch Matrizenprodukte .....	150
3.4.	Determinanten .....	154
3.4.1.	Determinanten von zweireihigen Matrizen .....	154
3.4.2.	Determinanten von dreireihigen Matrizen .....	157
3.4.3.	Induktive Determinantendefinition .....	160
3.4.4.	Determinanteneigenschaften .....	163
3.4.5.	Berechnung von Determinanten .....	167
3.4.6.	Leibnizsche Determinantendefinition .....	175
3.4.7.	Weitere Determinantendefinitionen .....	182
3.4.8.	Explizite Darstellung der Inversen. Cramersche Regel .....	185
3.4.9.	Rangkriterium von FROBENIUS. Regelfall .....	189
3.5.	Einführung in die Theorie der linearen Optimierung .....	194
3.5.1.	Problemstellung .....	194
3.5.2.	Basisfolgen .....	196
3.5.3.	Simplextransformation .....	198
3.5.4.	Zulässige Basisfolgen .....	201
3.5.5.	Das Optimierungsverfahren .....	204
3.5.6.	Die Ermittlung einer nichtnegativen Basislösung .....	213
3.6.	(Ergänzung, siehe Seite XI)	
4.	<b>Affine Geometrie des Raumes</b> .....	219
4.1.	Grundbegriffe .....	219
4.1.1.	Axiome der räumlichen affinen Geometrie .....	219
4.1.2.	Räumliche Koordinatensysteme .....	220
4.2.	Geraden und Ebenen .....	222
4.2.1.	Parametergleichung der Geraden .....	222
4.2.2.	Ebenengleichungen .....	224
4.2.3.	Lagerelationen .....	228
4.2.4.	Kollinearitätskriterium, Komplanaritätskriterium .....	230
5.	<b>Metrische Geometrie des Raumes</b> .....	233
5.1.	Axiome der räumlichen metrischen Geometrie .....	233
5.2.	Produkte von Vektoren .....	233
5.2.1.	Das Skalarprodukt .....	233
5.2.2.	Das vektorielle Produkt .....	237

5.2.3. Spatvolumen. Spatprodukt .....	23
5.2.4. Das dreifache vektorielle Produkt .....	24
5.2.5. Das skalare Produkt zweier vektorieller Produkte .....	24
5.2.6. Das vektorielle Produkt zweier vektorieller Produkte .....	24
5.2.7. Reziproke Vektortripel .....	24
5.3. Geraden und Ebenen .....	24
5.3.1. Parameterfreie Ebenengleichung .....	24
5.3.2. Hessesche Normalform. Abstand eines Punktes von einer Ebene bzw. Geraden ..	24
5.3.3. Abstand windschiefer Geraden .....	24
5.3.4. Winkel zwischen zwei Ebenen. Winkel zwischen Gerade und Ebene .....	25
5.3.5. Projektion von ebenen Flächenstücken .....	25
<b>6. Mehrdimensionale Räume .....</b>	<b>251</b>
6.1. Affine und äquiaffine Räume .....	251
6.1.1. Koordinatensysteme. Lineare Teilräume .....	251
6.1.2. Volumenverhältnis. Äquiaffine Räume .....	254
6.2. Metrische Räume .....	255
6.2.1. Skalarprodukt .....	255
6.2.2. Orthonormierte Basis. Das Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren .....	257
6.3. Koordinatentransformationen .....	259
6.3.1. Affine Koordinatentransformationen .....	259
6.3.2. Transformation von kartesischen Koordinatensystemen .....	262
6.3.3. Orthogonale Matrizen .....	263
6.4. Affine Abbildungen .....	266
6.4.1. Begriff und Eigenschaften .....	266
6.4.2. Matrixdarstellung affiner Abbildungen .....	268
6.4.3. Produkte affiner Abbildungen .....	271
6.5. Affine Transformationen .....	271
6.5.1. Begriff .....	271
6.5.2. Äquiaffine Transformationen .....	273
6.5.3. Metrische Transformationen .....	273
6.5.4. Ähnlichkeitstransformationen .....	274
<b>7. Kurven und Flächen zweiter Ordnung .....</b>	<b>276</b>
7.1. Die allgemeine Gleichung zweiten Grades .....	276
7.1.1. Summenschreibweise der allgemeinen Gleichung zweiten Grades .....	276
7.1.2. Die allgemeine Gleichung zweiten Grades in Matrixschreibweise .....	276
7.1.3. Kurven und Flächen zweiter Ordnung mit Mittelpunkt .....	277
7.2. Hauptachsentransformation .....	279
7.2.1. Problemstellung .....	279
7.2.2. Eigenwerte und Eigenvektoren .....	281
7.2.3. Realität der Eigenwerte .....	283
7.2.4. Orthogonale Transformationen von symmetrischen Matrizen .....	284
7.3. Klassifikation der Kurven und Flächen zweiter Ordnung mit singulärem Gebilde	288
7.3.1. Die Normalform I .....	288
7.3.2. Das Ellipsoid .....	290
7.3.3. Das einschalige Hyperboloid .....	291

7.3.4. Das zweischalige Hyperboloid .....	291
7.3.5. Der Kegel .....	292
7.3.6. Die Kurven und die Zylinderflächen zweiter Ordnung .....	292
7.4. Klassifikation der Kurven und Flächen zweiter Ordnung ohne singuläres Gebilde	293
7.4.1. Die Normalform II .....	293
7.4.2. Das elliptische Paraboloid .....	294
7.4.3. Das hyperbolische Paraboloid .....	294
7.4.4. Die restlichen Fälle .....	295
7.4.5. Die Transformation auf die Normalform II .....	295
7.5. Tangenten und Polaren .....	297
7.5.1. Schnittpunkte einer Geraden mit einer Hyperfläche zweiter Ordnung .....	297
7.5.2. Tangente einer Kurve zweiter Ordnung .....	298
7.5.3. Tangentialebene einer Fläche zweiter Ordnung .....	298
7.5.4. Polare .....	299
7.6. Definite quadratische Formen .....	301
<b>Lösungen der Aufgaben</b> .....	303
<b>Ergänzung zu Kapitel 3</b> .....	359
3.6. Geometrische Lösung und Deutung von Problemen der linearen Optimierung...	359
3.6.1. Lineare Felder, Halbräume .....	359
3.6.2. Geometrische Deutung von linearen Optimierungsproblemen .....	362
3.6.3. Simplextransformation .....	366
3.6.4. Zulässige Basisfolgen .....	368
3.6.5. Das Optimierungsverfahren .....	370
3.6.6. Die Ermittlung einer nichtnegativen Basislösung .....	371
<b>Literaturverzeichnis</b> .....	373
<b>Namen- und Sachverzeichnis</b> .....	375