

Dipl.-Ing. Hans Dieter Schotten, Aachen

**Algebraische Konstruktion  
gut korrelierender  
Sequenzen und Analyse  
ihrer Leistungsfähigkeit in  
Codemultiplex-Systemen**

Reihe **10**: Informatik/  
Kommunikationstechnik Nr. **510**

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>1 Sequenzen und Korrelationsfunktionen</b>	<b>3</b>
1.1 Definitionen und grundlegende Eigenschaften . . . . .	4
1.1.1 Sequenzen und Familien . . . . .	4
1.1.2 Korrelationsfunktionen . . . . .	4
1.1.3 Beispiele für die Verwendung "gut" korrelierender Sequenzen . . . . .	5
1.1.4 Korrelationsparameter . . . . .	8
1.2 Grenzen für die Korrelationsparameter . . . . .	11
1.2.1 Sarwate- und Welch-Grenze ersten Grades . . . . .	11
1.2.2 Sarwate- und Welch-Grenze für Korrelationsparameter höherer Ordnung .	13
1.2.3 Optimale Grenzen nach Levenshtein . . . . .	17
1.2.4 Grenzen für den aperiodischen Spitzenkorrelationswert . . . . .	26
1.3 Kontinuierliche und diskrete Korrelationsparameter . . . . .	28
<b>2 Algebraische Beschreibung von Sequenzen</b>	<b>31</b>
2.1 Zahlentheoretische Grundlagen . . . . .	31
2.2 Algebraische Grundlagen . . . . .	33
2.2.1 Algebraische Strukturen . . . . .	33
2.2.2 Galois-Felder . . . . .	36
2.2.3 Zyklotomische Nebenklassen . . . . .	37
2.2.4 Trace-Funktion . . . . .	40
2.2.5 Charaktere . . . . .	41
2.3 Darstellung $p$ -näher Sequenzen . . . . .	42
2.3.1 $p$ -nähe $m$ -Folgen . . . . .	44
2.3.2 $q$ -nähe $m$ -Folgen . . . . .	45
2.4 Aus $q$ -nähen $m$ -Folgen abgeleitete Sequenzen . . . . .	46
2.4.1 Perfekte, D-perfekte und $\omega$ -zyklisch-perfekte Sequenzen . . . . .	46
2.4.2 Konstruktion $\omega$ -zyklisch-perfekter Sequenzen . . . . .	49

2.4.3	Transformationen zwischen den Korrelationseigenschaften . . . . .	50
2.4.4	Konstruktion perfekter Sequenzen . . . . .	50
2.4.5	Konstruktion vierphasiger Sequenzen . . . . .	55
2.4.6	Konstruktion ternärer Familien . . . . .	58
<b>3</b>	<b>Bestimmung quadratischer Korrelationsparameter</b>	<b>61</b>
3.1	Momente der periodischen Korrelationsfunktion . . . . .	61
3.2	Quadratische aperiodische Korrelationsparameter . . . . .	64
3.2.1	Quadratische Korrelationsparameter in der Ursprungsphase . . . . .	64
3.2.2	Mittelwert der quadratischen Parameter über die Sequenzphasen . . . . .	65
3.3	Quadratische Korrelationsparameter der $\omega$ -zyklischen Korrelation . . . . .	67
3.4	Familienklassifikation nach quadratischen Korrelationsparametern . . . . .	70
3.4.1	Familiertypen . . . . .	70
3.4.2	Produkte von Sequenzfamilien . . . . .	71
3.4.3	Verallgemeinerte Gold-Familien . . . . .	72
3.4.4	Eigenschaften der Familiertypen und Klassifikation . . . . .	72
3.4.5	Invarianzoperationen der S1- und S2-Familien . . . . .	74
<b>4</b>	<b>Algebraisch konstruierte Familien</b>	<b>75</b>
4.1	Klassifikation nach Familienparametern . . . . .	75
4.2	Sequenzkonstruktion in Galois-Feldern . . . . .	77
4.2.1	Definition und Darstellung . . . . .	77
4.2.2	Bestimmung des periodischen Spitzenkorrelationswertes . . . . .	78
4.2.3	Quadratische Dezimationen . . . . .	81
4.2.4	Verteilung der Korrelationswerte . . . . .	95
4.3	Lineare Familien in Galois-Feldern . . . . .	98
4.3.1	Umfang linearer Familien . . . . .	99
4.3.2	Beispiele für lineare Familien . . . . .	101
4.3.3	Familien mit einer Dezimation: m-Folgen, McEliece-, Matsufuji-Imamura- und verwandte Familien . . . . .	101
4.3.4	Familien mit zwei Dezimationen . . . . .	106
4.3.5	Lineare Familien mit $D = \{1, d\}$ und $\text{ggT}(d, N) = 1$ . . . . .	107
4.3.6	Lineare Familien mit $D = \{1, d\}$ und $\text{ggT}(N, d) > 1$ und $c_d = r$ . . . . .	111
4.3.7	Kleine Kasami-Familie ( $D = \{1, p^{r/2} + 1\}$ ) . . . . .	114
4.3.8	Große Kasami-Familie . . . . .	116
4.3.9	Große binäre Familien . . . . .	119
4.3.10	Familien mit gradbegrenzten Polynomen . . . . .	123

4.3.11	Optimale lineare binäre Familien . . . . .	125
4.4	Nichtlineare Familien in Galois-Feldern . . . . .	127
4.4.1	Boztas-Kumar-Familie . . . . .	128
4.5	Sequenzkonstruktion in Galois-Ringen . . . . .	130
4.5.1	Motivation . . . . .	130
4.5.2	Galois-Ringe . . . . .	130
4.5.3	Darstellung und Konstruktion $Z_4$ -linearer Familien . . . . .	133
4.5.4	$Z_4$ -lineare vierphasige Gold-Familien . . . . .	134
4.5.5	Galois-Feld-Repräsentation vierphasiger Sequenzen . . . . .	139
4.5.6	Vierphasige Familien mit $D = \{1, 3\}$ . . . . .	141
4.5.7	Weitere große Familien . . . . .	144
4.6	Nichtlineare binäre Familien . . . . .	146
4.6.1	Verschachtelte Sequenzen . . . . .	146
4.6.2	Ableitung binärer Sequenzen aus vierphasigen Sequenzen . . . . .	146
4.6.3	Konstruktion $Z_4$ -linearer binärer Familien . . . . .	149
4.7	Produkt linearer Familien mit $\exp(j 2\pi kn/N)$ . . . . .	155
4.7.1	Konstruktion, Phasenzahl und Familienumfang . . . . .	155
4.7.2	Abschätzung der Spitzenkorrelationsparameter . . . . .	155
4.7.3	Allgemeine Aussagen zu den quadratischen Korrelationsparametern . . . . .	156
4.7.4	Lücke-Familie . . . . .	157
4.7.5	Weitere Familien . . . . .	158
4.7.6	Ausgangsfamilien aus Galoisringen . . . . .	159
4.8	Vergleich und Klassifikation der Familien . . . . .	160
4.8.1	Gemeinsame Strukturmerkmale der algebraisch erzeugten Familien . . . . .	160
4.8.2	Klassifikation nach quadratischen Korrelationsparametern . . . . .	161
4.8.3	Vergleich der periodischen Spitzenkorrelationsparameter . . . . .	163
4.8.4	Abschätzung des aperiodischen Spitzenkorrelationswertes . . . . .	167
<b>5</b>	<b>“Direct-Sequence” Codemultiplex-Systeme</b> . . . . .	<b>171</b>
5.1	Analyse von “Direct-Sequence” Codemultiplex-Systemen . . . . .	172
5.1.1	Modellbeschreibung . . . . .	172
5.1.2	Bestimmung der Störleistung an den Empfängern . . . . .	175
5.1.3	Analyse für Teilnehmersets vom Typ I . . . . .	177
5.1.4	Analyse für Teilnehmersets vom Typ II und III . . . . .	177
5.1.5	Analyse für Teilnehmersets vom Typ II . . . . .	178
5.1.6	Analyse für Teilnehmersets vom Typ III . . . . .	179

5.2	BPSK- und MPSK-modulierte DS-CDMA-Systeme . . . . .	180
5.2.1	Teilnehmersets vom Typ III . . . . .	181
5.2.2	Signal- zu Rauschleistungsverhältnis und Bitfehlerrate . . . . .	181
5.2.3	Der mittlere Interferenzparameter AIP . . . . .	182
5.2.4	Der Einfluß von $\mu_c(1)$ . . . . .	195
5.2.5	Diskussion der Korrelationsparameter als Leistungskriterien . . . . .	198
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>201</b>
<b>A</b>	<b>Grenzen für die Spitzenkorrelationsparameter</b>	<b>204</b>
A.1	Grenzen für komplexwertige Sequenzen . . . . .	205
A.2	Grenzen für reellwertige Sequenzen . . . . .	206
A.3	Grenzen für binäre Sequenzen . . . . .	207
A.4	Grenzen für $P$ -Phasen-Sequenzen . . . . .	208
<b>B</b>	<b>Sequenzen und Sequenzfamilien</b>	<b>209</b>
B.1	Perfekte $P$ -Phasen-Sequenzen . . . . .	210
B.2	Binäre lineare Familien mit $N = 2^r - 1$ . . . . .	212
B.3	Optimale lineare binäre Familien . . . . .	216
B.4	Nichtbinäre lineare Familien primitiver Länge . . . . .	218
<b>C</b>	<b>Tabellen</b>	<b>224</b>
C.1	Zahlentheoretische Funktionen . . . . .	225
C.2	Primitive Polynome modulo 2 . . . . .	226
C.3	Primitive Polynome modulo $p$ , $p$ ungerade . . . . .	227
C.4	Irreduzible Polynome in Galois-Ringen . . . . .	228
C.4.1	Graeffesche Konstruktion von $g$ . . . . .	228
C.4.2	Darstellung der Elemente in Galois-Ringen . . . . .	228