

INHALT

Analysis

13.	Differentialrechnung	13
13.1.	Zahlenfolgen und unendliche Reihen mit konstanten Gliedern	13
13.1.1.	Zahlenfolgen	13
13.1.2.	Unendliche Reihen	15
13.2.	Grenzwert und Stetigkeit von Funktionen	25
13.2.1.	Grenzwert einer Funktion	25
13.2.2.	Begriff der Stetigkeit von Funktionen	28
13.3.	Die Ableitung einer Funktion	33
13.4.	Differentiationsregeln	35
13.4.1.	Grundregeln	35
13.4.2.	Ableitung der Umkehrfunktion	39
13.4.3.	Differentiation einer mittelbaren Funktion (Kettenregel)	40
13.4.4.	Differentiation eines Vektors und einer Determinante	41
13.5.	Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung	43
13.5.1.	Vorbemerkungen	43
13.5.2.	Der Satz von Rolle	44
13.5.3.	Der Mittelwertsatz	45
13.6.	Höhere Ableitungen	47
13.7.	Der Taylorsche Satz	48
13.7.1.	Herleitung der Taylorschen Formel	48
13.7.2.	Taylorentwicklungen für einige elementare Funktionen	53
13.8.	Unbestimmte Formen	57
13.9.	Maxima und Minima von Funktionen	60
13.9.1.	Theoretische Erörterungen	60
13.9.2.	Extremwertaufgaben	63
13.10.	Kurvenuntersuchungen	65
13.11.	Differentiation der Funktion zweier Veränderlicher	68
13.11.1.	Der Funktionsbegriff für zwei unabhängige Veränderliche	68
13.11.2.	Grenzwert und Stetigkeit einer Funktion zweier Veränderlicher	68
13.11.3.	Partielle Ableitungen	69
13.11.4.	Das vollständige Differential	71
13.12.	Mittelwertsatz und Taylorsche Formel für Funktionen zweier Veränderlicher	73
13.13.	Die Ableitung von mittelbaren und impliziten Funktionen	74
13.14.	Anwendung der Differentialrechnung auf die Fehlerrechnung	76
13.15.	Übungsaufgaben	79
13.16.	Literaturverzeichnis	80
14.	Integralrechnung	81
14.1.	Die Stammfunktion	81
14.1.1.	Der Begriff der Stammfunktion	81
14.1.2.	Die Stammfunktionen einiger elementarer Funktionen	81
14.2.	Das bestimmte Integral	82
14.2.1.	Der Begriff des bestimmten Integrals	82
14.2.2.	Eigenschaften des bestimmten Integrals	87
14.2.3.	Der Mittelwertsatz der Integralrechnung	88
14.3.	Das unbestimmte Integral	89
14.3.1.	Der Begriff des unbestimmten Integrals, der Zusammenhang zwischen Differential- und Integralrechnung	89

14.3.2.	Einige Regeln zur Ermittlung des unbestimmten Integrals	91
14.4.	Die Berechnung des bestimmten Integrals mit Hilfe des unbestimmten Integrals	93
14.5.	Der Logarithmus und die Exponentialfunktion	95
14.6.	Die Integration einiger spezieller Funktionen	101
14.6.1.	Rationale Funktionen	102
14.6.2.	Rationale Funktionen von e^x	106
14.6.3.	Rationale Funktionen von $\sin x$ und $\cos x$	106
14.6.4.	Rationale Funktionen von x und $\sqrt{ax^2 + bx + c}$	107
14.7.	Uneigentliche Integrale	107
14.8.	Integrale von Funktionen zweier Veränderlicher	108
14.8.1.	Doppelintegrale	110
14.8.2.	Der Rauminhalt von Rotationskörpern	113
14.8.3.	Das Peano-Jordansche Maß und das mehrfache Integral	114
14.8.4.	Das Lebesguesche Maß und das Lebesguesche Integral	121
14.8.5.	Das Stieltjes-Integral	130
14.9.	Integration eines vollständigen Differentials	131
14.10.	Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf die Kurventheorie	132
14.10.1.	Bogenlänge einer Kurve	132
14.10.2.	Begleitendes Dreieck einer Kurve	136
14.10.3.	Ebene Kurven	138
14.11.	Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf die Flächentheorie	141
14.11.1.	Parameterdarstellung einer Fläche, Tangentialebene und Flächennormale	141
14.11.2.	Krümmung einer Fläche	143
14.12.	Übungsaufgaben	143
14.13.	Literaturverzeichnis	144
15.	Unendliche Reihen	145
15.1.	Konvergenz und gleichmäßige Konvergenz	145
15.2.	Potenzreihen	150
15.2.1.	Das Konvergenzverhalten von Potenzreihen	151
15.2.2.	Differentiation und Integration von Potenzreihen	153
15.2.3.	Potenzreihen und Taylorscher Satz	155
15.2.4.	Beispiele und Anwendungen von Potenzreihen	156
15.2.5.	Der Ansatz mit unbestimmten Koeffizienten und der Quotient zweier Potenzreihen	159
15.2.6.	Einsetzen einer Potenzreihe in eine andere	164
15.3.	Die Anwendung von Potenzreihen zur Aufstellung von Tafeln der elementaren Funktionen	165
15.3.1.	Die Berechnung der Exponentialfunktion	166
15.3.2.	Die Berechnung der Logarithmen	168
15.3.3.	Die Berechnung der trigonometrischen Funktionen	170
15.4.	Übungsaufgaben	172
15.5.	Literaturverzeichnis	173
16.	Fourieranalyse und -synthese	174
16.1.	Einleitung	174
16.1.1.	Approximation durch ein Taylorpolynom	174
16.1.2.	Approximation durch ein Interpolationspolynom	175
16.1.3.	Gleichmäßige Approximation und Approximation im Mittel	176
16.2.	Fourierreihen	180
16.2.1.	Konvergenzeigenschaften von Fourierreihen	180
16.2.2.	Größenordnung der Fourierkoeffizienten	185
16.2.3.	Konvergenzverbesserung von Fourierreihen	189
16.2.4.	Die komplexe Form einer Fourierreihe	192
16.2.5.	Fourierentwicklung von Funktionen mit einer beliebigen Periode p	193

16.3.	Angenäherte harmonische Analyse und Synthese	196
16.3.1.	Vorbemerkung	196
16.3.2.	Das Verfahren von C. RUNGE	197
16.3.3.	Fouriersynthese nach der Beevers-Lipson-Streifenmethode	207
16.4.	Mehrdimensionale Fourieranalyse und -synthese	210
16.5.	Übungsaufgaben	217
16.6.	Literaturverzeichnis	217
17.	Differential- und Integralgleichungen	219
17.1.	Gewöhnliche Differentialgleichungen	219
17.1.1.	Einleitung	219
17.1.2.	Gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung	223
17.1.3.	Das Iterationsverfahren	224
17.1.4.	Lösungsverfahren	227
17.1.4.1.	Das Verfahren der Trennung der Variablen	227
17.1.4.2.	Die Methode des integrierenden Faktors	228
17.1.5.	Die lineare Differentialgleichung $y' + f(x)y + g(x) = 0$	231
17.1.6.	Differentialgleichungen höherer Ordnung	233
17.1.7.	Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung	237
17.1.7.1.	Lineare homogene Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	240
17.1.7.2.	Die inhomogene lineare Differentialgleichung	242
17.2.	Integralgleichungen	244
17.2.1.	Einleitung	244
17.2.2.	Die Integralgleichung zweiter Art	247
17.2.3.	Die Volterrasche Integralgleichung	251
17.2.4.	Der Zusammenhang zwischen Differential- und Integralgleichungen	252
17.2.5.	Eigenfunktionen	255
17.2.5.1.	Bemerkung über den von den Eigenfunktionen erzeugten linearen Raum	258
17.2.5.2.	Die inhomogene Integralgleichung mit symmetrischem Kern	259
17.2.6.	Randwertprobleme bei gewöhnlichen Differentialgleichungen höherer Ordnung ...	260
17.2.7.	Integralgleichungen erster Art	261
17.3.	Übungsaufgaben	265
17.4.	Literaturverzeichnis	265

Praktische Mathematik

18.	Lösung von Gleichungen	266
18.0.	Einleitung	266
18.1.	Lösung algebraischer Gleichungen	267
18.1.1.	Allgemeines	267
18.1.2.	Direkte Lösung	270
18.1.2.1.	Lineare Gleichungen	270
18.1.2.2.	Quadratische Gleichungen	270
18.1.2.3.	Kubische Gleichungen	271
18.1.2.4.	Gleichungen vierten Grades	273
18.1.2.5.	Gleichungen höheren Grades	275
18.1.3.	Spezielle Näherungsverfahren zur Lösung algebraischer Gleichungen	276
18.1.3.1.	Die Bernoullische Methode	276
18.1.3.2.	Beispiel zur Bernoullischen Methode	278
18.1.3.3.	Behandlung von Sonderfällen mit dem Bernoullischen Verfahren	279
18.1.3.4.	Das Graeffesche Verfahren	281
18.1.3.5.	Rechenschema zum Graeffeschen Verfahren	283
18.1.3.6.	Beispiele zum Graeffeschen Verfahren	285

18.1.3.7.	Bemerkungen zum Graeffeschen Verfahren	287
18.2.	Allgemein anwendbare Näherungsverfahren zur Lösung von Gleichungen	288
18.2.1.	Art des Vorgehens	288
18.2.2.	Methode des Eingabelns	288
18.2.2.1.	Beschreibung des Verfahrens	288
18.2.2.2.	Beispiel	290
18.2.3.	Das Newtonsche Verfahren	290
18.2.3.1.	Beschreibung des Verfahrens	290
18.2.3.2.	Beispiele	291
18.2.3.3.	Geschwindigkeit der Konvergenz	292
18.2.3.4.	Bemerkungen	293
18.2.4.	Das allgemeine Iterationsverfahren	295
18.2.4.1.	Prinzip des Verfahrens	295
18.2.4.2.	Konvergenz des Iterationsverfahrens	295
18.2.4.3.	Anschauliche Darstellung des Iterationsverfahrens	297
18.2.4.4.	Beispiel	298
18.2.4.5.	Fehlerabschätzung	298
18.2.4.6.	Konvergenzverbesserung	299
18.3.	Übungsaufgaben	300
18.4.	Literaturverzeichnis	300
19.	Numerische und graphische Methoden zur Differentiation und Integration	301
19.0.	Numerische Integration; Integrationsverfahren	301
19.1.	Interpolationsformeln	302
19.1.1.	Dividierte Differenzen oder Steigungen einer Funktion	302
19.1.2.	Die allgemeine Newtonsche Interpolationsformel	304
19.1.3.	Lagrangesche Interpolationsformel	306
19.1.4.	Beispiel	307
19.1.5.	Spezielle Interpolationsformeln bei äquidistanten Funktionswerten	309
19.1.6.	Gaußsche Interpolationsformel	314
19.1.7.	Stirlingsche Interpolationsformel	316
19.1.8.	Besselsche Interpolationsformel	318
19.1.9.	Beispiel	319
19.2.	Numerische Integration	321
19.2.1.	Besselsche und Stirlingsche Integrationsformeln	321
19.2.2.	Trapezformel, Keplersche Faßregel, Simpsonsche Formel	323
19.2.3.	Beispiel	325
19.3.	Mittelwertformeln	326
19.3.1.	Gaußsche und Tschebyscheffsche Mittelwertformel	326
19.3.2.	Mittelwertformeln von COTES und MACLAURIN	329
19.3.3.	Beispiel	332
19.4.	Numerische Differentiation	336
19.4.1.	Stirlingsche Formeln für die Ableitungen	336
19.4.2.	Besselsche Formeln für die Ableitungen	338
19.4.3.	Beispiel	339
19.5.	Graphische Methoden der Integration und Differentiation	342
19.5.1.	Graphische Differentiation	342
19.5.2.	Graphische Integration	343
19.6.	Übungsaufgaben	344
19.7.	Literaturverzeichnis	346
20.	Mathematische Instrumente	348
20.1.	Einleitung	348
20.2.	Kurvenzeichner und Instrumente zur Erzeugung von Abbildungen	348

20.2.1.	Gelenkmechanismen	348
20.2.2.	Bewegungen einer Ebene; Ellipsograph	353
20.2.3.	Pantograph (Storchnabel)	358
20.2.4.	Affinographen	360
20.2.5.	Koordinatographen	365
20.3.	Differenziergeräte	367
20.4.	Integratoren	368
20.4.1.	Planimeter	369
20.4.2.	Integrimeter	377
20.4.3.	Integraphen	378
20.5.	Harmonische Analysatoren	380
20.6.	Literaturverzeichnis	385
21.	Näherungsverfahren zur Lösung von Differential- und Integralgleichungen	386
21.1.	Graphische Verfahren zur Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung	386
21.1.1.	Das Richtungsfeld	386
21.1.2.	Das Isoklinenverfahren	389
21.1.3.	Die Strahlpunktmethode	391
21.1.4.	Verbesserung einer Näherungslösung durch wiederholte graphische Integration	394
21.2.	Numerische Verfahren zur Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung	395
21.2.1.	Das Iterationsverfahren	395
21.2.2.	Das Verfahren von ADAMS-STÖRMER	396
21.2.3.	Berechnung der Ausgangswerte für das Verfahren von ADAMS-STÖRMER durch Taylorentwicklung	401
21.2.4.	Das Integrationsverfahren von RUNGE-KUTTA	402
21.3.	Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung und Differentialgleichungen höherer Ordnung	406
21.3.1.	Das Verfahren von ADAMS-STÖRMER für Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung	406
21.3.2.	Das Verfahren von RUNGE-KUTTA für Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung	409
21.3.3.	Integrationsverfahren für Differentialgleichungen höherer Ordnung	410
21.4.	Genäherte Integration von Differentialgleichungen mit Hilfe des Differenzenverfahrens	410
21.4.1.	Finite Ausdrücke und das Differenzenverfahren	410
21.4.2.	Das Differenzenverfahren und Eigenwertaufgaben	413
21.4.3.	Das Differenzenverfahren zur Lösung partieller Differentialgleichungen	415
21.5.	Das Verfahren von RITZ zur Lösung von Rand- und Eigenwertaufgaben	420
21.6.	Näherungsverfahren zur Lösung von Integralgleichungen	424
21.6.1.	Genäherte Lösung einer inhomogenen linearen Integralgleichung	424
21.6.2.	Genäherte Bestimmung von Eigenwerten bei homogenen linearen Integralgleichungen	426
21.7.	Übungsaufgaben	427
21.8.	Literaturverzeichnis	428
22.	Digitale Rechenanlagen	429
22.1.	Übersicht über maschinelle Hilfsmittel der Mathematik	429
22.2.	Tischrechenmaschinen	430
22.3.	Aufbau und Anwendung von Lochkartenmaschinen	432
22.3.1.	Typen von Lochkartenmaschinen	432
22.3.2.	Anwendungsbeispiel	435

22.4.	Programmgesteuerte digitale Rechenanlagen	439
22.4.1.	Grundlagen	439
22.4.1.1.	Gliederung einer Rechnung	439
22.4.1.2.	Automatische Ausführung einer Rechnung	442
22.4.2.	Elemente der Rechenautomatentechnik	446
22.4.2.1.	Zahlendarstellung im Dualsystem	446
22.4.2.2.	Addition mit Hilfe von Kontaktschaltungen; Schaltalgebra	447
22.4.2.3.	Subtraktion und Komplementdarstellung	451
22.4.2.4.	Weitere Kontaktschaltungen	453
22.4.2.5.	Schaltungen mit Elektronenröhren	454
22.4.2.6.	Weitere elektronische Schaltelemente	456
22.4.2.7.	Speicherelemente	458
22.4.2.8.	Eingabe und Ausgabe	459
22.4.3.	Einteilung und Struktur digitaler Rechenautomaten	461
22.4.3.1.	Einteilung	461
22.4.3.2.	Struktur von Rechenautomaten	463
22.4.3.3.	Produktion von Rechenautomaten	465
22.4.3.3.1.	Rechenautomat Z 23	465
22.4.3.3.2.	Rechenautomat ZRA 1	468
22.4.3.3.3.	Rechenautomat Ural 2	469
22.4.3.3.4.	Rechenautomat TR 4	469
22.4.3.3.5.	Datenverarbeitungssystem IBM Serie 1440	470
22.4.3.4.	Entwicklungsrichtungen	470
22.5.	Literaturverzeichnis	472
23.	Programmierung für Digitalrechner	473
23.1.	Einleitung	473
23.2.	Eine elektronische digitale Rechenmaschine und ihr Befehlsschlüssel	473
23.2.1.	Eigenschaften der Maschine	473
23.2.2.	Der Befehlsschlüssel	474
23.2.2.1.	Einfache Transportbefehle und arithmetische Befehle	474
23.2.2.2.	Organisatorische Befehle	476
23.2.2.2.1.	Indexregisterbefehle	476
23.2.2.2.2.	Sprungbefehle	478
23.2.2.2.3.	Funktionsbefehle	480
23.2.2.3.	Befehle für Operationen aus der Logik	480
23.2.2.4.	Notierung von Befehlsfolgen	481
23.2.2.5.	Befehle für Gruppentransporte und für die Ausgabe	482
23.2.2.6.	Maschinenzyklus für die Befehlsbearbeitung	484
23.2.2.7.	Bedienung der Maschine	484
23.2.2.8.	Die Befehlsliste	487
23.3.	Elemente des Programmierens	488
23.3.1.	Vereinbarungen für eine Notierung	488
23.3.2.	Maschinensprache und problemorientierte Sprache	488
23.3.3.	Das Programmieren	489
23.3.3.1.	Allgemeine Hinweise	489
23.3.3.2.	Aufgabenformulierung in einer problemorientierten Sprache	490
23.3.3.3.	Aufstellung eines mathematischen Modells	491
23.3.3.4.	Arithmetisierung der Aufgabe; Auswahl eines geeigneten mathematischen Lösungs- verfahrens (Approximationsverfahren)	491
23.3.3.5.	Algorithmische Notierung des Lösungsweges	492
23.3.3.6.	Das Strukturdiagramm (Flußdiagramm); der zugeordnete Graph; zyklische, lineare und gestreckte Programme	493
23.3.3.7.	Der Speichereinteilungsplan	495

23.3.3.8.	Das Programm (Programm im Pseudocode)	496
23.3.3.8.1.	Aufstellung und Abarbeitung des Programms	496
23.3.3.8.2.	Absolute, relative, symbolische Adressierung im Programm; die Adressenänderung erster Art	497
23.3.3.9.	Zusammenfassung	498
23.3.3.10.	Beispiel 1	499
23.3.3.11.	Zusammenhänge zwischen zyklischen Programmen mit Induktions- und Iterationszyklen; Adressenänderungen dritter Art	505
23.3.3.12.	Programme mit relativen und symbolischen Adressen	505
23.3.3.13.	Beispiele 2 und 3	509
23.3.3.14.	Bemerkungen zum Programmieren	512
23.3.4.	Programmprüfung (Fehlersuche)	514
23.3.4.1.	Programmtest ohne Benutzung des Rechenautomaten	514
23.3.4.2.	Codieren und Programmtest an der Rechenmaschine bezüglich Adressenrechnungen	515
23.3.4.3.	Rechentest unter Einsatz des Rechenautomaten	516
23.3.5.	Zusammenstellung der Schritte, die zum Programm führen	516
23.4.	Programmierungserleichterungen	517
23.4.1.	Kurze Beschreibung der vorhandenen Möglichkeiten für eine Erleichterung der Programmierung	517
23.4.2.	Einsatz von Unterprogrammen (Unterprogrammtechnik, Adressenänderungen zweiter Art)	519
23.4.3.	Operatorprogrammierung	528
23.4.4.	Kompilation und Interpretation	531
23.5.	Anwendungsgebiete und Rechenmethoden für Digitalrechner	532
23.6.	ALGOL 60	537
23.6.1.	Einleitung	537
23.6.2.	Kurze Beschreibung des Aufbaus der Sprache ALGOL 60	538
23.6.3.	ALGOL 60	539
23.6.3.1.	Basissymbole	539
23.6.3.2.	Bezeichnungen	540
23.6.3.3.	Zahlen	541
23.6.3.4.	Ketten	541
23.6.3.5.	Ausdrücke	542
23.6.3.5.1.	Variable	542
23.6.3.5.2.	Funktionen	542
23.6.3.5.3.	Arithmetische Ausdrücke	543
23.6.3.5.4.	Logische Ausdrücke	544
23.6.3.5.5.	Zielausdrücke	545
23.6.3.6.	Anweisungen und Vereinbarungen	546
23.6.3.6.1.	Vereinbarungen	546
23.6.3.6.2.	Anweisungen	548
23.7.	Übungsaufgabe	551
23.8.	Literaturverzeichnis	552
23.9.	Zum Studium empfohlene Zeitschriften	553
24.	Integrieranlagen	554
24.1.	Allgemeine Prinzipien	554
24.2.	Mechanisch arbeitende Integrieranlagen	555
24.2.1.	Integrator	555
24.2.2.	Beispiel	556
24.2.3.	Weitere Bauelemente	557
24.3.	Beispiel für die Anwendung einer Integrieranlage	559
24.4.	Bemerkungen zur technischen Realisierung	560
24.5.	Elektronische Integrieranlagen	561

24.5.1.	Arbeitsweise des Integrators	561
24.5.2.	Weitere Bauelemente	563
24.5.3.	Schaltsymbole	565
24.5.4.	Produktion elektronischer Integrieranlagen	565
24.6.	Anwendung elektronischer Integrieranlagen	567
24.6.1.	Lösung gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen	567
24.6.2.	Erzeugung elementarer Funktionen	570
24.6.3.	Weitere Anwendungen elektronischer Integrieranlagen	573
24.7.	Übungsaufgaben	575
24.8.	Literaturverzeichnis	576
Inhalt des ersten Bandes		577
Inhalt des dritten Bandes		580
Namen- und Sachverzeichnis		583