

# Inhalt

	<b>1 Die Erweiterung von <math>\mathbf{N}</math> nach <math>\mathbf{Q}^+</math></b>	
	1.1 Größenbereiche . . . . .	9
A	1.1.1 Beispiele für Größenbereiche . . . . .	9
B	1.1.2 Die Struktur von Größenbereichen . . . . .	17
C	1.1.3 Didaktische Anmerkungen zur Behandlung von Größenbereichen	18
	1.2 Die Einführung von Bruchzahlen über Größenbereiche . . . . .	24
A	1.2.1 Auslegen kommensurabler Strecken . . . . .	24
B	1.2.2 Definition von Bruchzahlen . . . . .	25
C	1.2.3 Bruchzahlen als Operatoren . . . . .	28
	1.3 Das Rechnen mit Bruchzahlen . . . . .	32
A	1.3.1 Operieren mit Repräsentanten für Bruchzahlen . . . . .	32
B	1.3.2 Relationen und Operationen in der Menge der Bruchzahlen . . .	38
C	1.3.3 Das Operatormodell der Bruchrechnung . . . . .	47
	<b>2 Die Einführung negativer Zahlen</b>	
	2.1 Die Erweiterung von $\mathbf{N}_0$ nach $\mathbf{Z}$ . . . . .	53
A	2.1.1 Würfeln um zwei Sorten von Gegenständen . . . . .	53
	2.1.2 Ein Verschiebungsmodell . . . . .	55
	2.1.3 Ein Verformungsmodell . . . . .	58
B	2.1.4 Die Einbettung einer Halbgruppe in eine Gruppe . . . . .	60
C	2.1.5 Die Einführung ganzer Zahlen im Unterricht . . . . .	72
	2.2 Die Erweiterung der Menge der natürlichen Zahlen zum Ring der ganzen Zahlen . . . . .	77
B	2.2.1 Zur Einführung . . . . .	77
	2.2.2 Die Konstruktion des Gebildes $(\mathbf{Z}', \cdot,  )$ aus $(\mathbf{N}_0, \cdot,  )$ . . . . .	77
	2.2.3 Der Ring $(\mathbf{Z}, +, \cdot, \leq,  )$ . . . . .	79
C	2.2.4 Ein Vorschlag zur Behandlung der Multiplikation ganzer Zahlen im Unterricht . . . . .	80
	2.3 Die Erweiterung der Menge der natürlichen Zahlen zum Körper der rationalen Zahlen . . . . .	82
B	2.3.1 Zur Einführung . . . . .	82
	2.3.2 Die Konstruktion des Halbkörpers $(\mathbf{Q}_0, \cdot, +,  , \leq)$ aus $(\mathbf{Q}^+, \cdot,  )$ . . . . .	82
	2.3.3 Die Konstruktion des Körpers der rationalen Zahlen $\mathbf{Q}$ . . . . .	86
C	2.3.4 Die Einführung negativer rationaler Zahlen im Unterricht . . . . .	89

8 Inhalt

	2.4	Skizzieren der Erweiterung $\mathbf{N}_0 \rightarrow \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Q}$ . . . . .	91
A	2.4.1	In $\mathbf{N}_0$ unlösbare Gleichungen . . . . .	91
B	2.4.2	Die Erweiterung von $\mathbf{N}_0$ nach $\mathbf{Z}$ . . . . .	93
	2.4.3	Die Erweiterung von $\mathbf{Z}$ nach $\mathbf{Q}$ . . . . .	95
	2.5	Beispiele für die Nichtabgeschlossenheit von $\mathbf{Q}$ . . . . .	98
A	2.5.1	Ein geometrischer Beweis . . . . .	98
	2.5.2	Ein arithmetischer Beweis . . . . .	100
	3	Lösungen der Aufgaben . . . . .	101
		Literatur. . . . .	116
		Sachverzeichnis . . . . .	117

**Bemerkung:** Durch \* werden umfangreiche Aufgaben gekennzeichnet.