

TABLE DES MATIÈRES

DE LA QUATRIÈME PARTIE.

LIVRE VIII.

DÉFORMATION INFINIMENT PETITE ET REPRÉSENTATION SPHÉRIQUE.

CHAPITRE I.

	Pages.
<i>Déformation infiniment petite. Première solution</i>	1
<p>Énoncé précis du problème à résoudre. — Comment on pourrait entreprendre son étude par la méthode des séries. — Le problème de la déformation infiniment petite consiste dans la détermination des premiers termes de ces séries. — Ce que l'on appelle la <i>directrice</i> et le <i>module</i> de la déformation infiniment petite. — Couples de surfaces applicables l'une sur l'autre. — Rapports de la question proposée avec le problème dit des <i>éléments rectangulaires</i>. — Indication des travaux publiés sur ces questions. — Première solution du problème : on est ramené à l'intégration d'une équation linéaire du second ordre — Interprétation géométrique. — Application au paraboloidé. — Raisonnement <i>a priori</i> montrant que la solution du problème peut être obtenue pour toute surface du second degré. — Développement de la solution pour le cas de la sphère. — Démonstration géométrique : la surface (S_1) qui correspond à une sphère par orthogonalité des éléments est la <i>surface moyenne</i> d'une congruence isotrope. — Équations qui déterminent cette surface moyenne. — Retour au cas général ; les caractéristiques de l'équation linéaire dont dépend la solution sont les lignes asymptotiques de la surface proposée.</p>	

CHAPITRE II.

<i>Déformation infiniment petite. Deuxième solution : les formules de M. Lieuvre</i>	19
<p>Introduction directe des lignes asymptotiques. — Réduction du problème à l'intégration d'une équation aux dérivées partielles à invariants égaux ; ce qui montre qu'on pourra obtenir une suite illimitée de surfaces dont on connaîtra les lignes asymptotiques et pour lesquelles on saura résoudre le problème de la déformation infiniment petite. —</p>	

Formules de M. Lelievre. — Leur démonstration directe. — Comment on peut en déduire, par une méthode rapide, la solution du problème de la déformation infiniment petite. — Applications de ces formules. — Propriété de la représentation sphérique des lignes asymptotiques qui montre que cette représentation sphérique ne saurait être choisie arbitrairement. — Théorème de M. Kœnigs : les perspectives des lignes asymptotiques sur un plan quelconque déterminent un réseau plan (nécessairement conjugué comme tous les réseaux plans) à invariants *ponctuels* égaux. — Interprétation géométrique de l'égalité des invariants pour l'équation linéaire ponctuelle ou tangentielle relative à un réseau conjugué tracé sur une surface quelconque. — Élément linéaire d'une surface rapportée à ses lignes asymptotiques. — Démonstration nouvelle du théorème d'Enneper relatif à la torsion des lignes asymptotiques. — Application aux surfaces à courbure constante. — Quand on sait résoudre le problème de la déformation infiniment petite pour une telle surface, on sait le faire aussi pour toutes celles qui en dérivent par la transformation de M. Bianchi. — Formules analogues à celles de M. Lelievre quand les variables ont été choisies d'une manière quelconque. — La solution générale du problème de la déformation infiniment petite écrite avec des variables quelconques.

CHAPITRE III.

Les douze surfaces. Développements géométriques se rattachant aux précédentes solutions......

48

Étant données deux surfaces (S) et (S_1) qui se correspondent avec orthogonalité des éléments linéaires, au réseau des lignes asymptotiques de chacune de ces surfaces correspond, sur l'autre, un réseau conjugué à invariants ponctuels égaux. — On déduit du premier couple deux nouvelles surfaces (Σ) et (A) qui se correspondent, elles aussi, avec orthogonalité des éléments linéaires. — Définition de (Σ) : c'est l'enveloppe des plans menés par tous les points de (S) perpendiculairement aux directrices de la déformation. — On sait résoudre le problème de la déformation infiniment petite pour (Σ) lorsqu'on sait résoudre ce problème pour (S) . — Les lignes asymptotiques se correspondent sur (S) et sur (Σ) . — Réciproque : théorème de M. Guichard. — Relation géométrique entre les deux nappes de la surface focale d'une congruence rectiligne, dans le cas où les lignes asymptotiques se correspondent sur ces deux nappes. — Propriétés qui rattachent la surface (A) à la surface (S_1) : les plans tangents aux points correspondants sont parallèles et le système conjugué commun a ses invariants ponctuels égaux, sur les deux surfaces. — Réciproque : théorèmes de MM. Kœnigs et Cosserat. — Les trois réseaux I, II, III formés par les lignes asymptotiques de (S) , de (S_1) et de (A) sont harmoniques deux à deux. — Introduction de huit nouvelles surfaces qui, jointes aux quatre premières, forment un ensemble de douze surfaces que l'on peut grouper deux à deux de telle manière qu'elles se correspondent avec orthogonalité des éléments linéaires, ou bien par

plans tangents parallèles, ou bien par polaires réciproques relativement à une sphère concentrique à l'origine, ou enfin comme focales d'une même congruence rectiligne sur lesquelles les lignes asymptotiques se correspondent. — Sur chacune de ces douze surfaces, les trois réseaux I, II, III déjà signalés sont, l'un formé des lignes asymptotiques, l'autre conjugué à invariants ponctuels égaux, le dernier enfin conjugué à invariants tangentiels égaux. — Quand deux surfaces se correspondent avec orthogonalité des éléments linéaires, le système conjugué commun a ses invariants tangentiels égaux. — Lorsque, sur une surface, un réseau conjugué a ses invariants ponctuels (ou tangentiels) égaux, le réseau conjugué qui lui est harmonique a ses invariants tangentiels (ou ponctuels) égaux.

CHAPITRE IV.

Transformations diverses. Inversion composée..... 73

Les six couples de surfaces qui se correspondent avec orthogonalité des éléments linéaires. — Théorème et construction de Ribaucour. — Quand on sait résoudre le problème de la déformation infiniment petite pour une surface donnée, on sait résoudre ce même problème pour toutes les surfaces homographiques et corrélatives. — Démonstration de ce théorème général pour les homographies qui conservent le plan de l'infini; pour la transformation par polaires réciproques relative au parabolôïde défini par l'équation $z = \frac{x^2 + y^2}{2}$. — Ces deux cas particuliers entraînent le théorème général. — Définition de l'*inversion composée*: sa propriété fondamentale. — Quand on sait résoudre le problème de la déformation pour une surface (S), on sait aussi le résoudre pour toutes celles qui en dérivent par l'inversion composée. — L'inversion composée rattachée aux notions relatives aux formes quadratiques dont les coefficients sont constants.

CHAPITRE V.

Applications diverses..... 87

Étude du cas particulier où la surface (S_1), qui correspond à (S) avec orthogonalité des éléments linéaires, se réduit à un plan. — Ce que deviennent alors les douze surfaces. — Application à la question suivante: déterminer toutes les congruences rectilignes pour lesquelles la surface moyenne est un plan. — On détermine, parmi ces congruences rectilignes, celles qui sont formées des normales à une surface. — Étude du problème plus étendu: déterminer toutes les surfaces pour lesquelles les développables formées par les normales découpent, sur la développée moyenne, un réseau conjugué. — La solution de ce problème se ramène à la détermination de la déformation infiniment petite des surfaces minima. — Cette détermination se ramène d'ailleurs à l'intégration d'une équation linéaire harmonique. — C'est de la même équation aux dérivées partielles que dépend la détermination des surfaces ayant

même représentation sphérique de leurs lignes de courbure que la surface minima adjointe à la proposée. — Comment on retrouve les surfaces minima dans l'étude de la déformation infiniment petite de la sphère. — Développement des calculs. — Déformation infiniment petite d'une surface à courbure constante négative. — L'une des douze surfaces devient alors une de ces surfaces, considérées en premier lieu par M. Voss, et sur lesquelles il y a un réseau conjugué exclusivement composé de lignes géodésiques. — Étude des développantes de ces surfaces. — Elles constituent l'une des nappes d'une congruence rectiligne pour laquelle les développables correspondent aux lignes de courbure sur les deux nappes de la surface focale. — Démonstration géométrique des théorèmes de M. Guichard, relatifs à ces surfaces. — Le Chapitre se termine par la démonstration d'un lemme dont il a été fait usage dans la démonstration précédente, et qui est susceptible de nombreuses applications à la théorie des congruences rectilignes.

CHAPITRE VI.

Roulement de deux surfaces 111

Rappel des formules données au Livre VII, Chapitre III. — Relations entre les quantités D, D', D'' de Gauss et les rotations p, q, r, p_1, q_1, r_1 . — Roulement d'une surface (Θ) sur une surface applicable (Θ_1) . — Formules données au Livre I; formules complémentaires. — Comment on peut rattacher à la considération du roulement une nouvelle méthode de recherche des surfaces applicables sur une surface donnée. — Tout mouvement particulier contenu dans le déplacement général se ramène au roulement d'une surface réglée sur une surface de même nature et applicable sur la première. — Premier cas où ces surfaces réglées sont développables. — Extension de la notion de réciprocity relative aux tangentes conjuguées. — Second mouvement particulier dans lequel les surfaces réglées sont développables. — Système conjugué commun à (Θ) et à (Θ_1) considéré par Ribaucour. — Théorèmes de M. Königs relatifs à ce système conjugué commun. — La théorie des systèmes cycliques et le théorème fondamental du n° 761 rattachés à la considération du déplacement étudié dans ce Chapitre. — Propriété relative aux congruences engendrées par des droites parallèles et pour lesquelles les développables se correspondent. — Propriétés diverses des différents systèmes cycliques que l'on peut rattacher au même déplacement. — Comment la connaissance d'un couple de surfaces applicables peut conduire à une infinité de couples de surfaces admettant la même représentation sphérique.

CHAPITRE VII.

Les systèmes cycliques et les surfaces applicables 137

Rappel des formules établies au Livre IV, Chap. XV, et relatives au système orthogonal formé par les lignes de courbure. — Relation entre les deux équations, ponctuelle et tangentielle, relatives au système

conjugué formé par ces lignes. — Détermination des surfaces admettant la même représentation sphérique qu'une surface donnée (Σ). — Rappel de la première solution. — Théorème de Ribaucour qui montre que les surfaces cherchées admettent pour normales les cordes de contact d'une famille de sphères ayant leur centre sur la surface (Σ). — Détermination des systèmes cycliques engendrés par des cercles normaux à (Σ). — Propriétés géométriques relatives aux systèmes cycliques. — Propositions qui rattachent la théorie de la représentation sphérique à celle de la déformation des surfaces. — Détermination des systèmes cycliques déduite d'un couple de surfaces applicables. — Ce que deviennent les réseaux I, II, III du Chapitre III pour un couple de surfaces applicables (Θ), (Θ_1). — Définition nouvelle de la méthode de transformation introduite au n° 903 sous le nom d'*inversion composée*. — Les formules qui permettent de définir le roulement de (Θ) sur (Θ_1). — Détermination de tous les systèmes triples orthogonaux pour lesquels une des familles est composée de surfaces à lignes de courbure planes dans un système.

CHAPITRE VIII.

Représentation sphérique. Solution complète du problème..... 169

Emploi des coordonnées tangentielles α , β , ξ . — Réduction du problème de la représentation sphérique à l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du second ordre dont les invariants sont égaux. — Les caractéristiques de cette équation sont les lignes de courbure de la surface. — Rapprochement entre les deux surfaces qui conduisent à la même équation du second ordre, l'une pour le problème de la déformation infiniment petite, l'autre pour le problème de la représentation sphérique. — On retrouve la transformation de contact de M. Lie. — Notions générales sur une classe étendue de transformations de contact. — Application à celle de M. Lie. — Recherche des surfaces pour lesquelles on sait résoudre le problème de la représentation sphérique. — On démontre que, lorsqu'on sait résoudre ce problème pour une surface (Σ), on peut le résoudre, à l'aide d'une simple quadrature, pour toutes les surfaces inverses des surfaces (Σ') admettant même représentation sphérique que (Σ). — Ce procédé, appliqué aux surfaces qui correspondent à l'équation $\frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} = 0$, fournit toutes les surfaces réelles pour lesquelles on peut obtenir la solution complète du problème. — Démonstration analytique de ce résultat. — Compléments donnés aux développements du Livre IV, Chap. VII.

CHAPITRE IX.

Surfaces à lignes de courbure planes..... 198

Première application des méthodes précédentes. — Rappel des formules propres à déterminer les surfaces admettant une représentation sphérique donnée. — Recherche des surfaces à lignes de courbure planes

dans un système. — Elles correspondent toutes à des équations à invariants égaux pour lesquelles la solution est de premier ou de second rang. — Méthode de recherche directe : théorème général qui permet de les déterminer très simplement au moyen de trois développables dont l'une (Δ) est isotrope et les deux autres (D), (D_1) applicables l'une sur l'autre avec correspondance des génératrices rectilignes. — On déduit de cette proposition que, si une ligne de courbure plane est un cercle, toutes les autres sont des cercles, que si une d'elles est algébrique, toutes les autres le sont aussi, etc. — Mise en œuvre de la génération précédente. — Calculs et constructions géométriques propres à déterminer la surface réelle la plus générale à lignes de courbure planes, sans aucun signe de quadrature.

CHAPITRE X.

Surfaces isothermiques à lignes de courbure planes..... 217

Rappel des différentes classes de surfaces à lignes de courbure planes déterminées ou étudiées dans le cours de cet Ouvrage. — Indication de cas particuliers dans lesquels ces surfaces sont isothermiques. — Recherche systématique des surfaces qui satisfont à cette double condition d'avoir leurs lignes de courbure planes, au moins dans un système, et d'être isothermiques. — Mise en équation du problème. — Intégration des équations linéaires auxquelles satisfont les rotations. — Tout se ramène à la détermination d'une fonction h satisfaisant à deux équations aux dérivées partielles. — Application de la théorie des fonctions doublement périodiques de seconde espèce et des méthodes de M. Hermite à cette intégration. — La solution dépend des fonctions elliptiques et comporte une fonction arbitraire. — Explication de ce dernier résultat et construction géométrique de la surface. — Cas particulier où le module de la fonction elliptique devient nul.

CHAPITRE XI.

Surfaces à lignes de courbure sphériques..... 239

Les surfaces à lignes de courbure sphériques dans un système correspondent à des équations aux dérivées partielles à invariants égaux qui sont du premier, du second ou du troisième rang. — Méthode directe de recherche. — Étant donnée une surface à lignes de courbure sphériques (Σ), il existe une infinité de surfaces (Σ_0) de même définition, dépendant d'une fonction arbitraire et admettant la même représentation sphérique. — Théorème de M. Blutel. — Construction géométrique des surfaces (Σ_0). — Comment on peut, sans aucune intégration, déduire toutes les surfaces à lignes de courbure sphériques des surfaces à lignes de courbure planes. — Propriétés diverses : en appliquant des inversions convenablement choisies à chaque ligne de courbure sphérique de la surface, on peut les placer toutes sur une même développable isotrope. — Définition de la rotation autour d'un cercle ; proposition qui rapproche les surfaces à lignes de cour-

bure sphériques des surfaces à lignes de courbure planes. — Des surfaces dont toutes les lignes de courbure sont planes ou sphériques. — Leur détermination se ramène à la solution de l'équation fonctionnelle

$$\sum_1^6 (A_i + B_i)^2 = 0.$$

— Résultat : toutes les surfaces cherchées dérivent simplement, soit du cône, soit de la surface dont les normales sont tangentes à un cône.

CHAPITRE XII.

Généralisations diverses..... 267

Systèmes d'équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre à n variables indépendantes dans lesquels chaque équation ne contient qu'une dérivée seconde prise par rapport à deux variables différentes. — Forme type de ces systèmes, condition pour qu'ils admettent $n + 1$ intégrales linéairement indépendantes. — Extension à ces systèmes de la méthode de Laplace. — Comment on les intègre lorsque la suite de Laplace se termine dans un sens. — Indication de certains systèmes généraux dont l'intégrale peut être obtenue. — Cas particuliers. — Applications géométriques. — Systèmes de coordonnées curvilignes à lignes conjuguées. — Ces systèmes sont les seuls qui puissent correspondre à d'autres systèmes, les plans tangents aux surfaces coordonnées étant parallèles pour les points correspondants. — Interprétation géométrique des substitutions de Laplace généralisées. — Cas particulier des systèmes triples orthogonaux. — Théorème de M. Combescure. — Démonstration directe de ce théorème. — Application. — Détermination d'une classe de systèmes triples pour lesquels toutes les lignes de courbure sont planes. — En combinant l'inversion avec le théorème de M. Combescure, on peut faire dériver d'un système triple orthogonal une suite illimitée de systèmes analogues. — Détermination des systèmes orthogonaux à lignes de courbure planes dans un seul système. — Détermination des systèmes orthogonaux à lignes de courbure sphériques dans un seul système.

CHAPITRE XIII.

Nouvelles classes de surfaces applicables..... 308

Ce Chapitre est consacré à l'exposition des résultats nouveaux que l'on doit à M. Weingarten dans la recherche des surfaces applicables sur une surface donnée. — La méthode de M. Weingarten exige que l'on connaisse déjà au moins une surface réelle ou imaginaire admettant l'élément linéaire donné. — Elle fait dépendre la détermination de toutes les surfaces (Θ) admettant cet élément linéaire de celle d'autres surfaces (Σ), satisfaisant à une certaine équation aux dérivées partielles, qui établit une relation entre les rayons de courbure prin-

cipaux, les distances d'un point fixe au plan tangent et au point de contact. — Cas particulier où les caractéristiques de cette équation aux dérivées partielles sont les lignes de longueur nulle de la représentation sphérique de (Σ) . — L'élément linéaire est alors défini par la formule simple

$$ds^2 = du^2 + 2[u + \psi'(v)] dv^2,$$

et l'équation à intégrer prend la forme simple

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{\psi''(v)}{(1 + \alpha\beta)^2}.$$

Indication des différentes formes de $\psi'(v)$ pour lesquelles l'intégration est possible. — Démonstration de différents résultats dus à MM. Weingarten, Baroni, Goursat. — Les cas les plus intéressants font connaître toutes les surfaces applicables sur le paraboloides du second degré dont une génératrice rectiligne est tangente au cercle de l'infini. — Réduction de l'élément linéaire de ces surfaces à la forme de Liouville qui permet l'intégration des lignes géodésiques.

CHAPITRE XIV.

Dernières recherches..... 338

Nouveau développement donné par M. Weingarten aux recherches précédentes. — Problème proposé. — Étant donné un élément linéaire, pour résoudre le problème de la déformation, on mène par chaque point de la surface cherchée (Θ) une tangente faisant un angle déterminé, mais d'ailleurs variable, avec les courbes coordonnées; puis on prend comme variables indépendantes deux paramètres quelconques propres à définir la direction de cette droite dans l'espace. — Formation des équations aux dérivées partielles auxquelles satisfont les coordonnées curvilignes u et v considérées comme fonctions de ces paramètres. — A ce propos, l'on rappelle et l'on complète quelques propriétés de la ligne de striction des surfaces réglées. — Étant donnée une congruence rectiligne, assembler les droites en surfaces réglées dont les lignes de striction soient sur une des nappes focales de la congruence. — Les propriétés géométriques établies permettent de simplifier les équations qui déterminent u et v et de les réduire à une seule équation aux dérivées partielles du second ordre. — Renvoi au Mémoire de M. Weingarten couronné par l'Académie des Sciences.

NOTES ET ADDITIONS.

NOTE I.

	Pages.
Sur les méthodes d'approximations successives dans la théorie des équations différentielles, par M. <i>Émile Picard</i>	353

NOTE II.

Sur les géodésiques à intégrales quadratiques, par M. <i>G. Kœnigs</i>	368
--	-----

NOTE III.

Sur la théorie des équations aux dérivées partielles du second ordre, par M. <i>E. Cosserat</i>	405
---	-----

NOTES DE L'AUTEUR.

NOTE IV.

Sur la torsion des courbes gauches et sur les courbes à torsion constante..	423
---	-----

NOTE V.

Sur les formules d'Euler et sur le déplacement d'un solide invariable.....	433
--	-----

NOTE VI.

Note sur une équation différentielle et sur les surfaces spirales.....	442
--	-----

NOTE VII.

Sur la forme des lignes de courbure dans le voisinage d'un ombilic.....	448
---	-----

NOTE VIII.

Sur les lignes asymptotiques et sur les lignes de courbure de la surface des ondes de Fresnel.....	466
--	-----

NOTE IX.

Sur la Géométrie Cayleyenne et sur une propriété des surfaces à génératrice
circulaire..... 489

NOTE X.

Sur les équations aux dérivées partielles..... 497

NOTE XI.

Sur l'équation auxiliaire..... 505

TABLE ANALYTIQUE DES MATIÈRES PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE 517

TABLE DES NOMS D'AUTEURS PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE..... 533

FIN DES TABLES DE LA QUATRIÈME ET DERNIÈRE PARTIE.