

INHALT

I. Elemente der Topologie und der Funktionalanalysis

§ 1. Lineare Räume

1. Definition des linearen Raumes	17
2. Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit von Vektoren	18
3. Teilräume.....	19
4. Der Quotientenraum	20
5. Lineare Operatoren	22
6. Rechnen mit Operatoren	24
7. Invariante Teilräume	28
8. Konvexe Mengen und konvexe Funktionale.....	28
9. Sätze über die Fortsetzung eines linearen Funktional.....	30

§ 2. Topologische Räume

1. Definition des topologischen Raumes	35
2. Das Innere einer Menge. Umgebungen.....	36
3. Abgeschlossene Mengen. Abgeschlossene Hülle einer Menge	37
4. Teilräume.....	38
5. Abbildungen topologischer Räume.....	38
6. Bikompakte Mengen	40
7. HAUSDORFFSche Räume	41
8. Normale Räume	43
9. Lokal bikompakte Räume.....	44
10. Der Satz von STONE	45
11. Die durch eine Funktionenfamilie definierte schwache Topologie	48
12. Topologisches Produkt von Räumen.....	49
13. Metrische Räume.....	52
14. Kompakte Mengen in metrischen Räumen	56

§ 3. Topologische lineare Räume

1. Definition des topologischen linearen Raumes	58
2. Abgeschlossene Teilräume in topologischen linearen Räumen	59
3. Konvexe Mengen und konvexe Funktionale in lokal konvexen Räumen	60
4. Definition einer lokal konvexen Topologie mit Hilfe konvexer Funktionale	62
5. Endlichdimensionale Räume	64
6. Stetige lineare Funktionale	66
7. Der konjugierte Raum	68
8. Konvexe Mengen in einem endlichdimensionalen Raum	71
9. Konvexe Mengen im konjugierten Raum	72
10. Kegel	77

11. Orthogonalräume in konjugierten Raum.....	78
12. Analytische Vektorfunktionen	80
13. Vollständige lokal konvexe Räume	80
§ 4. Normierte Räume	
1. Definition des normierten Raumes	81
2. Reihen in normierten Räumen	86
3. Quotientenräume eines vollständigen normierten Raumes	86
4. Beschränkte lineare Operatoren	87
5. Beschränkte lineare Funktionale. Der konjugierte Raum	92
6. Vollstetige Operatoren	93
7. Analytische Vektorfunktionen mit Werten in einem vollständigen normierten Raum	95
§ 5. HILBERTSche Räume	
1. Definition des HILBERTSchen Raumes	97
2. Projektion eines Vektors auf einen Teilraum	99
3. Beschränkte lineare Funktionale über einem HILBERTSchen Raum	101
4. Orthogonalsysteme von Vektoren in einem HILBERTSchen Raum	103
5. Orthogonale Summe von Teilräumen	108
6. Die direkte Summe von HILBERTSchen Räumen	109
7. Der Graph eines Operators	110
8. Abgeschlossene Operatoren. Abschließung eines Operators	111
9. Der adjungierte Operator	112
10. Beschränkte Operatoren.....	116
11. Verallgemeinerung auf Operatoren in einem BANACHSchen Raum.....	119
12. Projektionsoperatoren	119
13. Reduzierbarkeit	123
14. Partiiell isometrische Operatoren	123
15. Matrixdarstellung eines Operators	124
§ 6. Integration auf einem lokal bikompakten Raum	
1. Grundbegriffe. Problemstellung	126
2. Grundeigenschaften des Integrals.....	127
3. Fortsetzung des Integrals auf von unten halbstetige Funktionen.....	128
4. Oberes Integral einer beliebigen nichtnegativen reellen Funktion	131
5. Äußeres Maß einer Menge	132
6. Äquivalente Funktionen	134
7. Die Räume \mathcal{L}^1 und L^1	135
8. Summierbare Mengen	139
9. Meßbare Mengen	142
10. Meßbare Funktionen	143
11. Der reelle Raum L^2	149
12. Der komplexe Raum L^2	151
13. Der Raum L^∞	151
14. Positiver und negativer Teil eines linearen Funktionals	151
15. Der Satz von RADON-NIKODYM	153
16. Der zu L^1 konjugierte Raum	154
17. Komplexe Maße.....	156
18. Integrale auf Produkträumen	157
19. Integration von Vektor- und Operatorfunktionen	164

II. Grundbegriffe und Sätze aus der Theorie der normierten Algebren

§ 7. Algebraische Grundbegriffe

1. Definition der Algebra	166
2. Algebren mit Einselement	167
3. Das Zentrum einer Algebra	170
4. Ideale	170
5. Das Radikal	173
6. Homomorphismen und Isomorphismen von Algebren	176
7. Reguläre Darstellung einer Algebra	178

§ 8. Topologische Algebren

1. Definition der topologischen Algebra	179
2. Topologische Adjunktion des Einselements	181
3. Algebren mit stetigen Inversen	182
4. Die Resolvente in einer Algebra mit stetigen Inversen	184
5. Topologische Divisionsalgebren mit stetigen Inversen	185
6. Algebren mit stetigen Quasiinversen	186

§ 9. Normierte Algebren

1. Definition der normierten Algebra	186
2. Adjunktion des Einselements	188
6. BANACHSche Algebren mit Einselement	188
4. Stetige Homomorphismen normierter Algebren	190
5. Reguläre Darstellungen einer normierten Algebra	192

§ 10. Symmetrische Algebren

1. Definition und Eigenschaften der symmetrischen Algebren	194
2. Positive Funktionale	197
3. Normierte symmetrische Algebren	199
4. Positive Funktionale auf einer BANACHSchen symmetrischen Algebra	200

III. Kommutative normierte Algebren

§ 11. Realisierung einer kommutativen Algebra als Funktionenalgebra

1. Die Quotientenalgebra nach einem maximalen Ideal	203
2. Funktionen von maximalen Idealen, die durch Elemente der Algebra erzeugt werden	204
3. Topologisierung der Menge aller maximalen Ideale	208
4. Algebren ohne Einselement	211
5. Erzeugendensysteme einer Algebra	212
6. Analytische Funktionen von Elementen einer Algebra	213
7. Analytische Funktionen von mehreren Elementen einer Algebra	217
8. Zerlegung einer Algebra in die direkte Summe von Idealen	218
9. Primäre Ideale	219

§ 12. Homomorphismen und Isomorphismen von kommutativen Algebren

1. Die Eindeutigkeit der Norm in einer halbeinfachen Algebra	222
2. Symmetrische Algebren	224

§ 13. Der SCHILOWSche Rand	
1. Definition und Eigenschaften des SCHILOWSchen Randes	224
2. Erweiterung maximaler Ideale	226
§ 14. Vollsynchronische kommutative Algebren	
1. Definition der vollsynchronischen Algebra	227
2. Ein Kriterium für die Vollsynchronie	228
3. Eine Anwendung des Satzes von STONE	229
4. Der SCHILOWSche Rand \mathfrak{M} einer vollsynchronischen Algebra	230
§ 15. Reguläre Algebren	
1. Definition der regulären Algebra	231
2. Normale Funktionenalgebren	231
3. Der Strukturraum einer Algebra	233
4. Eigenschaften regulärer Algebren	235
5. Algebren ohne Einselement	239
6. Eine hinreichende Bedingung für die Regularität einer Algebra	239
§ 16. Vollreguläre kommutative Algebren	
1. Definition und Eigenschaften der vollregulären Algebren	240
2. Realisierungen vollregulärer kommutativer Algebren	242
3. Verallgemeinerung auf pseudonormierte Algebren	248
IV. Darstellungen symmetrischer Algebren	
§ 17. Grundlegende Begriffe und Sätze der Darstellungstheorie	
1. Definition der Darstellung. Einfache Eigenschaften	251
2. Direkte Summe von Darstellungen	252
3. Beschreibung einer Darstellung mit Hilfe positiver Funktionale	253
4. Darstellung vollregulärer kommutativer Algebren. Spektralsatz	257
5. Spektraloperatoren	265
6. Irreduzible Darstellungen	267
7. Zusammenhang zwischen Vektoren und positiven Funktionalen	268
§ 18. Einbettung einer symmetrischen Algebra in eine Operatoralgebra	
1. Reguläre Norm	269
2. Reduzierte Algebren	270
3. Minimale reguläre Norm	272
§ 19. Unzerlegbare Funktionale und irreduzible Darstellungen	
1. Positive Funktionale, die einem gegebenen Funktional untergeordnet sind	274
2. Die Algebra C_f	276
3. Unzerlegbare positive Funktionale	277
4. Vollständigkeits- und Approximationssätze	278
§ 20. Anwendungen auf kommutative symmetrische Algebren	
1. Die minimale reguläre Norm in einer kommutativen symmetrischen Algebra	281
2. Positive Funktionale über einer kommutativen symmetrischen Algebra	283
3. Beispiele	285
4. Vollsynchronische Algebren	289

§ 21. Das verallgemeinerte SCHURsche Lemma

- 1. Kanonische Zerlegung eines Operators. 296
- 2. Hauptsatz 297
- 3. Anwendung auf die direkte Summe paarweise nicht äquivalenter Darstellungen 299
- 4. Anwendung auf Darstellungen, die ein Vielfaches einer gegebenen irreduziblen Darstellung sind 300

§ 22. Einige Darstellungen der Algebra $\mathfrak{B}(\mathfrak{F})$

- 1. Die Ideale der Algebra $\mathfrak{B}(\mathfrak{F})$ 303
- 2. Die Algebra I_0 und ihre Darstellungen 305
- 3. Darstellungen der Algebra $\mathfrak{B}(\mathfrak{F})$ 307

V. Spezielle Algebren

§ 23. Vollschrmetrische Algebren

- 1. Definition. Beispiele für vollschrmetrische Algebren 310
- 2. Spektrum 311
- 3. Fortsetzungssätze 313
- 4. Kriterium für die Vollschrmetrie 318

§ 24. Vollreguläre Algebren

- 1. Eigenschaften vollregulärer Algebren 320
- 2. Realisierung einer vollregulären Algebra als Operatoralgebra 322
- 3. Die Quotientenalgebra einer vollregulären Algebra 325

§ 25. Duale Algebren

- 1. Annulatoralgebren und duale Algebren 326
- 2. Ideale einer Annulatoralgebra 328
- 3. Halbeinfache Annulatoralgebren 331
- 4. Einfache Annulatoralgebren 337
- 5. HILBERTsche Algebren 340
- 6. Vollreguläre duale Algebren 343

§ 26. Algebren von Vektorfunktionen

- 1. Definition einer Algebra von Vektorfunktionen 345
- 2. Ideale einer Algebra von Vektorfunktionen 346
- 3. Die Zugehörigkeit einer Vektorfunktion zu einer Algebra 349
- 4. Vollreguläre Algebren 350
- 5. Das kontinuierliche Analogon zum SCHURschen Lemma 357
- 6. Der Strukturraum einer vollregulären Algebra 364

VI. Gruppenalgebren

§ 27. Topologische Gruppen

- 1. Definition einer Gruppe 366
- 2. Untergruppen 367
- 3. Definition und Eigenschaften einer topologischen Gruppe 368
- 4. Invariantes Integral und invariantes Maß auf einer topologischen Gruppe 369
- 5. Das invariante Integral auf einer lokal bikompakten Gruppe 370



§ 28. Definition und Eigenschaften der Gruppenalgebren	
1. Definition der Gruppenalgebra	378
2. Eigenschaften der Gruppenalgebra	381
§ 29. Unitäre Darstellungen einer lokal bikompakten Gruppe. Ihr Zusammenhang mit den Darstellungen der Gruppenalgebra	
1. Unitäre Darstellungen einer Gruppe	384
2. Der Zusammenhang zwischen den Darstellungen der Gruppe und der Gruppenalgebra	384
3. Der Vollständigkeitssatz	388
4. Beispiele	389
§ 30. Positiv definite Funktionen	
1. Positiv definite Funktionen und ihr Zusammenhang mit den unitären Darstellungen	399
2. Der Zusammenhang der positiv definiten Funktionen mit den positiven Funktionalen einer Gruppenalgebra	401
3. Reguläre Mengen	405
4. Trigonometrische Polynome auf einer Gruppe	407
5. Das Spektrum	408
§ 31. Die harmonische Analyse auf einer kommutativen lokal bikompakten Gruppe	
1. Die maximalen Ideale der Gruppenalgebra einer kommutativen Gruppe. Charaktere	411
2. Die Gruppe der Charaktere	415
3. Positiv definite Funktionen auf einer kommutativen Gruppe	416
4. Die Umkehrformel und der PLANCHERELSche Satz für eine kommutative Gruppe	418
5. Trennbarkeitseigenschaft der Menge $[L^1 \cap P]$	423
6. Dualitätssatz	424
7. Unitäre Darstellungen einer kommutativen Gruppe	425
8. Sätze vom TAUBERSchen Typ	426
9. Bikompakte Gruppen	430
10. Kugelfunktionen	432
11. Die verallgemeinerte Verschiebung	434
§ 32. Darstellung bikompakter Gruppen	
1. Die Algebra $L^2(\mathcal{G})$	437
2. Darstellung einer bikompakten Gruppe	438
3. Das Tensorprodukt von Darstellungen	443
4. Der Dualitätssatz für bikompakte Gruppen	444
VII. Algebren von Operatoren eines HILBERTSchen Raumes	
§ 33. Verschiedene Topologien der Algebra	
1. Schwache Topologie	447
2. Starke Topologie	447
3. Ultrastarke Topologie	449
4. Gleichmäßige Topologie	450

§ 34. Schwach abgeschlossene Teilalgebren der Algebra $\mathfrak{B}(\xi)$	
1. Grundbegriffe	450
2. Die Haupteinheit	451
3. Das Zentrum	455
4. Faktorisierung	456
§ 35. Relative Äquivalenz	
1. Operatoren und Teilräume, die zu einer Algebra gehören	456
2. Fundamentalhilfssatz	457
3. Definition der relativen Äquivalenz	458
4. Vergleich abgeschlossener Teilräume	459
5. Endliche und unendliche Teilräume	461
§ 36. Relative Dimension	
1. Der ganze Teil des Quotienten zweier Teilräume	465
2. Existenz eines minimalen Teilraumes	466
3. Das Fehlen eines minimalen Teilraumes	467
4. Existenz und Eigenschaften der relativen Dimension	469
5. Der Wertebereich der relativen Dimension. Klassifikation der Faktoren	473
6. Die Invarianz der Faktorklasse gegenüber einem symmetrischen Isomorphismus	475
§ 37. Relative Spur	
1. Definition der Spur	475
2. Eigenschaften der Spur	476
3. Die Spur in den Faktoren der Klassen (I_∞) und (II_∞)	482
§ 38. Struktur und Beispiele von Faktorklassen	
1. Die Abbildung $M \rightarrow M_{(\mathfrak{M})}$	482
2. Die Beschreibung der Faktoren der Klassen (I) und (II) durch Matrizen	485
3. Beschreibung der Faktoren der Klasse (I)	486
4. Die Struktur der Faktoren der Klasse (II_∞)	488
5. Ein Beispiel für einen Faktor aus der Klasse (II_1)	489
6. Approximativ endliche Faktoren der Klasse (II_1)	491
7. Der Zusammenhang zwischen den Klassen der Faktoren M und M' ...	491
8. Der Zusammenhang zwischen symmetrischen Isomorphismen und Raumisomorphismen	492
9. Unbeschränkte Operatoren, die zu einem Faktor endlicher Klasse gehören	492
§ 39. Unitäre Algebren und Algebren mit Spur	
1. Definition der unitären Algebra	492
2. Definition einer Algebra mit Spur	493
3. Konstruktion einer unitären Algebra mit Hilfe der Spur	493
4. Die kanonische Spur in einer unitären Algebra	493
VIII. Die Zerlegung einer Operatorenalgebra in irreduzible Algebren	
§ 40. Problemstellung. Die Zerlegung eines positiven Funktionals in elementare Funktionale	
1. Problemstellung	497
2. Reduzible und zentral reduzible positive Funktionale	498

3. Sätze über konvexe Mengen	500
4. Die Zerlegung reduzibler Funktionale	502
5. Ein Satz über die Erweiterung des Integrals	507
6. Die Ableitungen reduzibler positiver Funktionale	508
§ 41. Zerlegung einer Algebra von Operatoren	
1. Die Diagonalzerlegung eines positiven Funktionals	512
2. Anwendung auf die Zerlegung einer Algebra	518
3. Die Zerlegung einer Algebra in Faktoren	523
4. Die MAUTNERSche Zerlegung	524
5. Die Zerlegung der Darstellung einer symmetrischen Algebra in irreduzible Darstellungen	525
6. Die Zerlegung der unitären Darstellungen einer lokal bikompakten Gruppe in irreduzible Darstellungen	526
Anhang I. Halbgeordnete Mengen. ZORNSches Lemma	529
Anhang II. Teilnetze in einem bikompakten Raum	529
Bezeichnungen	530
Literatur	531
Namenregister	563
Sachregister	565