Inhaltsverzeichnis.

Abteilung I.

Seite

Die Begriffe: Infinitesimale Transformation und eingliedrige Gruppe in der Ebene . . . . 1—85

Kap. 1. Beispiele von Gruppen von Punkttransformationen . . . 1
§ 1. Ein- und zweigliedrige Gruppe von Translationen. 1
§ 2. Die eingliedrige Gruppe der Rotationen um einen festen Punkt in der Ebene. 6
§ 3. Eingliedrige Gruppe von affinen Transformationen 11
§ 4. Die Gruppe aller Bewegungen des Raumes 15
§ 5. Einige Bemerkungen über gewöhnliche Differentialgleichungen 17
Kap. 2. Eingliedrige Gruppe in der Ebene 21
§ 1. Begriff einer Transformation und einer eingliedrigen Gruppe von Transformationen in zwei Veränderlichen. 21
§ 2. Der allgemeine Gruppenbegriff 24
§ 3. Existenz einer infinitesimalen Transformation in der eingliedrigen Gruppe 26
§ 4. Construction einer eingliedrigen Gruppe aus einer infinitesimalen Transformation 30
§ 5. Nachweis, dass eine eingliedrige Gruppe nur eine infinitesimale Transformation besitzt und durch dieselbe bestimmt ist . . . 38
Kap. 3. Symbol einer infinitesimalen Transformation und einfache Formen einer eingliedrigen Gruppe der Ebene. . . 45
§ 1. Einführung neuer Veränderlicher in eine eingliedrige Gruppe 46
§ 2. Symbol einer infinitesimalen Transformation 49
§ 3. Reihenentwickelung der endlichen Gleichungen einer Gruppe 56
Kap. 4. Bestimmung aller Functionen und Curven, welche bei einer eingliedrigen Gruppe der Ebene invariant bleiben, insbesondere der Bahncurven 62
§ 1. Die Invarianten einer eingliedrigen Gruppe in der Ebene . . 62
§ 2. Die Bahncurven einer eingliedrigen Gruppe der Ebene . . . 64
§ 3. Die bei allen Transformationen einer eingliedrigen Gruppe der Ebene invarianten Curven. 69
§ 4. Einige wichtige Classen von infinitesimalen Transformationen der Ebene 75

Seite

Abteilung II.

Verwertung des Begriffes der infinitesimalen Transformation für Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen zwei Veränderlichen . . . . 86—187

Kap. 5. Invariante Curvenscharen 86
§ 1. Kriterium dafür, dass eine Schar von ∞^1 Curven der Ebene eine Transformation gestattet 86
§ 2. Kriterium dafür, dass eine Schar von ∞^1 Curven alle Transformationen einer eingliedrigen Gruppe gestattet 89
§ 3. Beispiele 92
Kap. 6. Gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung in x, y, welche eine eingliedrige Gruppe gestatten. 95
§ 1. Zusammenhang zwischen einer infinitesimalen Transformation und einem Integrabilitätsfactor 95
§ 2. Kriterium dafür, dass eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung in x, y eine eingliedrige Gruppe Uf gestattet 102
§ 3. Beispiele 107
§ 4. Neuer Beweis und Umkehrung des Theorems 8 112
§ 5. Integration der gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung durch Einführung canonischer Veränderlicher . . . 114
Kap. 7. Beziehungen zwischen den infinitesimalen Transformationen, welche eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung in x, y gestattet 121
§ 1. Bemerkungen über das Rechnen mit Symbolen infinitesimaler Transformationen 121
§ 2. Beziehung zwischen zwei infinitesimalen Transformationen, welche eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung gestattet 123
§ 3. Andere Ableitungen derselben Ergebnisse und ihre Umkehrung 128
§ 4. Beispiele 133
Kap. 8. Über die Bestimmung der Scharen von ∞^1 Curven und der Differentialgleichungen erster Ordnung, welche eine vorgelegte eingliedrige Gruppe gestatten 135
§ 1. Ausführung aller Transformationen einer eingliedrigen Gruppe auf eine beliebige Curve. 135
§ 2. Bestimmung der Differentialgleichungen erster Ordnung, welche eine vorgelegte eingliedrige Gruppe gestatten 138
§ 3. Beispiele: Klassen von Differentialgleichungen erster Ordnung in x, y, welche eine eingliedrige Gruppe gestatten und daher integrabel sind 140
Kap. 9. Geometrische Anwendungen 150
§ 1. Geometrische Deutung des Integrabilitätsfactors 150
§ 2. Isothermen in der Ebene und auf krummen Flächen 156
§ 3. Integration dreier Differentialgleichungen erster Ordnung in x, y, welche mehr als eine gemeinsame infinitesimale Transformation gestatten 162

Seite

§ 4. Anwendungen auf Probleme der Flächentheorie 169

§ 5. Integration gewisser Differentialgleichungen von Curvenscharen in der Ebene und auf krummen Flächen 181

Abteilung III.

Eingliedrige Gruppen in drei Veränderlichen . . . 187—286

Kap. 10. Systeme simultaner gewöhnlicher Differentialgleichungen und lineare partielle Differentialgleichungen. — Die Jacobi'sche Identität 188

§ 1. Geometrische Deutungen simultaner gewöhnlicher und linearer partieller Differentialgleichungen. 188

§ 2. Abhängigkeit linearer partieller Differentialgleichungen . . 193

§ 3. Der Klammerausdruck und die vollständigen Systeme . . . 196

§ 4. Die Jacobi'sche Identität 208

Kap. 11. Eingliedrige Gruppe in drei Veränderlichen 210

§ 1. Definition der eingliedrigen Gruppe im Raume, Existenz einer infinitesimalen Transformation derselben 210

§ 2. Construction einer eingliedrigen Gruppe aus einer infinitesimalen Transformation; Nachweis, dass sie nur eine solche enthält 215

§ 3. Symbol einer infinitesimalen Transformation und Reihenentwickelung der endlichen Gleichungen einer eingliedrigen Gruppe im Raume 224

Kap. 12. Bestimmung aller bei einer eingliedrigen Gruppe des Raumes invarianten Functionen, Curven und Flächen, insbesondere der Bahncurven 236

§ 1. Die Invarianten einer eingliedrigen Gruppe des Raumes . . 236

§ 2. Die Bahncurven einer eingliedrigen Gruppe des Raumes . . 238

§ 3. Die bei allen Transformationen einer eingliedrigen Gruppe des Raumes invarianten Curven und Flächen 241

§ 4. Analytische Kriterien für die Invarianz einer Curve oder Fläche bei einer eingliedrigen Gruppe des Raumes 248

§ 5. Einige geometrische Beispiele 254

Kap. 13. Erweiterte Gruppe von Punkttransformationen der Ebene. Endgültige Erledigung der Probleme, betreffend die Differentialgleichungen erster Ordnung, welche eine infinitesimale Punkttransformation zulassen . . . 261

§ 1. Erweiterung einer Punkttransformation der Ebene. 262

§ 2. Erweiterung einer eingliedrigen Gruppe von Punkttransformationen der Ebene 266

§ 3. Die infinitesimale Transformation der erweiterten Gruppe . 270

§ 4. Neues Kriterium dafür, dass eine Differentialgleichung erster Ordnung in x, y eine eingliedrige Gruppe gestattet 274

§ 5. Bestimmung aller Differentialgleichungen erster Ordnung in x, y, welche eine eingliedrige Gruppe gestatten 280

Seite

Abteilung IV.

Eingliedrige Gruppen und infinitesimale Transformationen in n Veränderlichen. Verwertung dieser Begriffe für Differentialgleichungen . . . . 286—472

Kap. 14. Eingliedrige Gruppe in n Veränderlichen, simultanes System gewöhnlicher Differentialgleichungen und lineare partielle Differentialgleichung in n Veränderlichen 287

§ 1. Eingliedrige Gruppe in n Veränderlichen. 287

§ 2. Symbol einer infinitesimalen Transformation und Reihenentwickelung der endlichen Gleichungen einer eingliedrigen Gruppe 296

§ 3. Die Bahncurven und Invarianten einer eingliedrigen Gruppe. Lineare partielle Differentialgleichung 299

§ 4. Deutung der Beziehung: $(UV) \equiv 0$ 305

Kap. 15. Lineare partielle Differentialgleichungen $Af = 0$, welche eingliedrige Gruppen gestatten 308

§ 1. Lineare partielle Differentialgleichungen, welche endliche Transformationen gestatten 309

§ 2. Kriterium dafür, dass $Af = 0$ eine eingliedrige Gruppe Uf gestattet. 313

§ 3. $Af = 0$ gestatte mehrere infinitesimale Transformationen . 318

§ 4. Geometrische Ableitung des Ergebnisses, seine Umkehrung und Verwertung 327

§ 5. Die Multiplicatoren einer Gleichung $Af = 0$ 333

Kap. 16. Gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung in x, y, welche eine eingliedrige Gruppe gestatten . . 347

§ 1. Scharen von ∞^2 Curven der Ebene und Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche eine Punkttransformation gestatten 348

§ 2. Zweimal erweiterte eingliedrige Gruppe 354

§ 3. Kriterium dafür, dass eine Differentialgleichung zweiter Ordnung in x, y eine eingliedrige Gruppe gestattet. 362

§ 4. Ein Beispiel aus der Flächentheorie 368

§ 5. Bestimmung und Integration aller Differentialgleichungen zweiter Ordnung in x, y, welche eine gegebene eingliedrige Gruppe gestatten 373

§ 6. Andere Integrationsmethode für Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit bekannter infinitesimaler Transformation. Weitere Ausführungen und Beispiele 383

Kap. 17. Differentialgleichungen zweiter Ordnung in x, y, welche mehrere infinitesimale Transformationen gestatten. Gruppen von infinitesimalen Transformationen 392

§ 1. Erweiterung eines Klammerausdruckes 393

§ 2. Differentialgleichungen zweiter Ordnung in x, y, welche mehrere infinitesimale Transformationen gestatten. 400

Seite

§ 3. Über die Anzahl der unabhängigen infinitesimalen Punkttransformationen einer Differentialgleichung zweiter Ordnung in x, y 403

§ 4. Gruppen von infinitesimalen Transformationen und ihre zweigliedrigen Untergruppen 406

Kap. 18. Zurückführung der zweigliedrigen Gruppen von infinitesimalen Transformationen der Ebene auf canonische Formen 412

§ 1. Die vier Typen von zweigliedrigen Gruppen von infinitesimalen Transformationen der Ebene 412

§ 2. Erster Typus: $(U_1 U_2) \equiv 0$ und $\varphi_1 U_1 f + \varphi_2 U_2 f \not\equiv 0$ . . . 415

§ 3. Zweiter Typus: $(U_1 U_2) \equiv 0$ und $\varphi_1 U_1 f + \varphi_2 U_2 f \equiv 0$. . . 418

§ 4. Dritter Typus: $(U_1 U_2) \equiv U_1 f$ und $\varphi_1 U_1 f + \varphi_2 U_2 f \not\equiv 0$. . 421

§ 5. Vierter Typus: $(U_1 U_2) \equiv U_1 f$ und $\varphi_1 U_1 f + \varphi_2 U_2 f \equiv 0$. . 423

Kap. 19. Integration der gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung in x, y, welche zwei bekannte infinitesimale Transformationen gestatten 425

§ 1. $\Omega(x, y, y', y'') = 0$ gestatte $U_1 f$ und $U_2 f$ und es sei $(U_1 U_2) \equiv 0$ und $\varphi_1 U_1 f + \varphi_2 U_2 f \not\equiv 0$ 426

§ 2. $\Omega(x, y, y', y'') = 0$ gestatte $U_1 f$ und $U_2 f$, und es sei $(U_1 U_2) \equiv 0$ und $\varphi_1 U_1 f + \varphi_2 U_2 f \equiv 0$ 427

§ 3. $\Omega(x, y, y', y'') = 0$ gestatte $U_1 f$ und $U_2 f$, und es sei $(U_1 U_2) \equiv U_1 f$ und $\varphi_1 U_1 f + \varphi_2 U_2 f \not\equiv 0$. 430

§ 4. $\Omega(x, y, y', y'') = 0$ gestatte $U_1 f$ und $U_2 f$, und es sei $(U_1 U_2) \equiv U_1 f$ und $\varphi_1 U_1 f + \varphi_2 U_2 f \equiv 0$ 431

Kap. 20. Integration einer linearen partiellen Differentialgleichung in drei Veränderlichen, welche bekannte infinitesimale Transformationen gestattet 434

§ 1. Integration einer partiellen Differentialgleichung $Af = 0$ in x, y, z, welche eine bekannte infinitesimale Transformation gestattet 434

§ 2. Integration einer partiellen Differentialgleichung $Af = 0$ in x, y, z, welche zwei bekannte infinitesimale Transformationen gestattet 439

§ 3. Beispiele 447

§ 4. Zweite Integrationsmethode für eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung in x, y, welche zwei bekannte infinitesimale Transformationen gestattet 457

§ 5. Beispiele und Ausblicke auf weitergehende Theorien 464

Abteilung V.

Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche eine dreigliedrige Gruppe gestatten, und verwandte Probleme . . . . 473—566

Kap. 21. Bestimmung der Zusammensetzung aller dreigliedrigen Gruppen von infinitesimalen Transformationen 473

§ 1. Begriff der Zusammensetzung und Begriff der invarianten

Seite

Untergruppen einer Gruppe von infinitesimalen Transformationen . . . 474
§ 2. Erster Typus von dreigliedrigen Zusammensetzungen . . . 479
§ 3. Die übrigen Typen von dreigliedrigen Zusammensetzungen. 486

Kap. 22. Bestimmung aller Typen von dreigliedrigen Gruppen von infinitesimalen Transformationen in zwei Veränderlichen . . . 493
§ 1. Bestimmung aller Typen von dreigliedrigen Gruppen der Ebene, deren erste derivierte Gruppen dreigliedrig sind . . 493
§ 2. Bestimmung der übrigen Typen von dreigliedrigen Gruppen der Ebene . . . 496
§ 3. Zusammenstellung aller Typen von dreigliedrigen Gruppen von infinitesimalen Transformationen der Ebene. 501

Kap. 23. Zurückführung der dreigliedrigen Gruppen von infinitesimalen Transformationen der Ebene auf ihre canonischen Formen. . . . 503
§ 1. Differentialgleichungen zweiter Ordnung in x, y, welche eine dreigliedrige Gruppe von infinitesimalen Transformationen gestatten. . . . 504
§ 2. Zurückführung einer dreigliedrigen Gruppe, deren erste derivierte dreigliedrig ist, auf ihre canonische Form 508
§ 3. Zurückführung einer dreigliedrigen Gruppe, deren erste derivierte zweigliedrig ist, auf ihre canonische Form 514
§ 4. Zurückführung einer dreigliedrigen Gruppe, deren erste derivierte eingliedrig ist, auf ihre canonische Form 524
§ 5. Reduction der dreigliedrigen Gruppen, welche keine Differentialgleichung zweiter Ordnung invariant lassen, auf ihre canonische Form . . . 529

Kap. 24. Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung in x, y, welche eine bekannte dreigliedrige Gruppe von infinitesimalen Transformationen gestattet. . . . 531
§ 1. Die gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche eine dreigliedrige Gruppe vom Typus 1 oder 2 gestatten . . . 532
§ 2. Die gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche eine dreigliedrige Gruppe gestatten, deren erste derivierte weniger als dreigliedrig ist . . . 536
§ 3. Zusammenfassung der Ergebnisse. Vermeidung der Reduction auf canonische Formen . . . 537

Kap. 25. Lineare partielle Differentialgleichungen in vier Veränderlichen und gewöhnliche Differentialgleichungen dritter Ordnung in x, y. . . . 542
§ 1. Über das Problem der Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen dritter Ordnung mit bekannter dreigliedriger Gruppe . . . 543
§ 2. Integration einer linearen partiellen Differentialgleichung

Seite

$Af = 0$ in vier Veränderlichen, welche eine bekannte dreigliedrige Gruppe von infinitesimalen Transformationen zulässt 545

§ 3. Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung dritter Ordnung in x, y, welche eine bekannte dreigliedrige Gruppe von infinitesimalen Transformationen gestattet 555

Schlusswort 567